

CỰC TRỊ HÀM HỢP VÀ HÀM LIÊN KẾT (Mức độ VD-VDC)

ÔN THI TNTHPT 2020

Dạng 1: Cực trị $f(x)$, $f(u)$,... biết các đồ thị không tham số

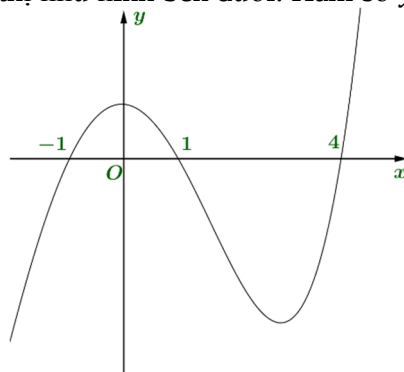
Dạng 2: Cực trị $f(x)$, $f(u)$,... biết các BBT, BXD không tham số

Dạng 3: Cực trị $f(x)$, $f(u)$,... liên quan biểu thức đạo hàm không tham số)

Dạng 4: Cực trị của hàm liên kết $h(x) = f(u) + g(x)$ biết các BBT, đồ thị không tham số

Dạng 5: Cực trị hàm hợp $f(u)$, $g(f(x))$, hàm liên kết... có tham số

CỰC TRỊ HÀM HỢP VÀ HÀM LIÊN KẾT

Dạng 1: Cực trị $f(x)$, $f(u)$,... biết các đồ thị không tham số (Không GTTĐ)**Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?**A.** 3.**B.** 2.**C.** 5.**D.** 4.**Lời giải****Chọn A**Gọi $x = a$, với $1 < a < 4$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-	0	+	
$f(x)$							
							$+\infty$
							$-\infty$

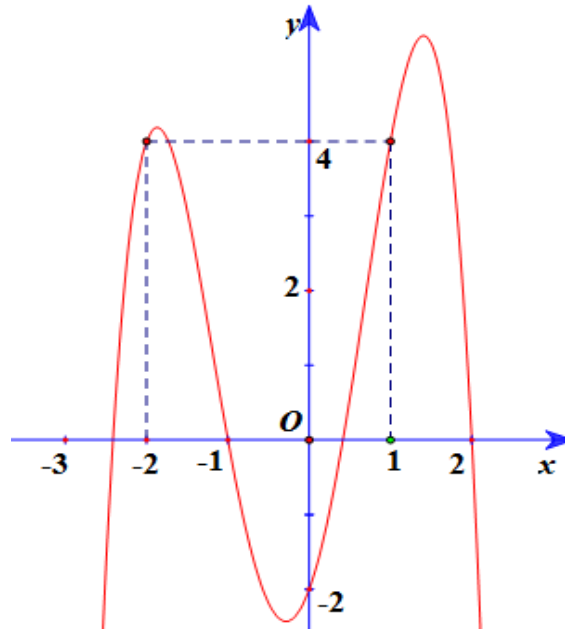
Ta có $y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2x \cdot f'(x^2)$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a} \end{cases}, \text{ với } 1 < a < 4$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$								$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 3 cực trị.**Câu 2.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^2 + 2x)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = (-2x + 2)f'(-x^2 + 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 0 \\ f'(-x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -x^2 + 2x = a, a \in (-2; -1) \\ -x^2 + 2x = b, b \in (-1; 0) \\ -x^2 + 2x = c, c \in (1; 2) \end{cases}$$

Đặt $h(x) = -x^2 + 2x$.

$h'(x) = -2x + 2$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	
		1			
		$-\infty$			

Từ bảng biến thiên, ta suy ra:

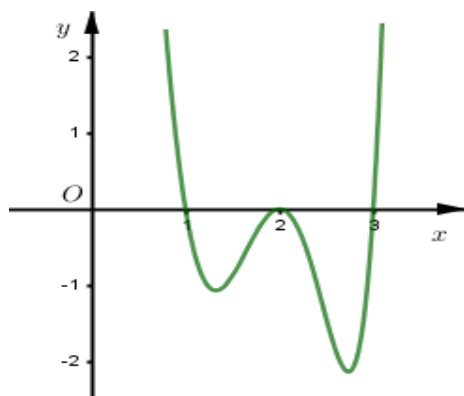
+ Phương trình: $-x^2 + 2x = a, a \in (-2; -1)$: có 2 nghiệm đơn.

+ Phương trình: $-x^2 + 2x = b, b \in (-1; 0)$: có 2 nghiệm đơn.

+ Phương trình: $-x^2 + 2x = c, c \in (1; 2)$: vô nghiệm.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^2 + 2x)$ là 5.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

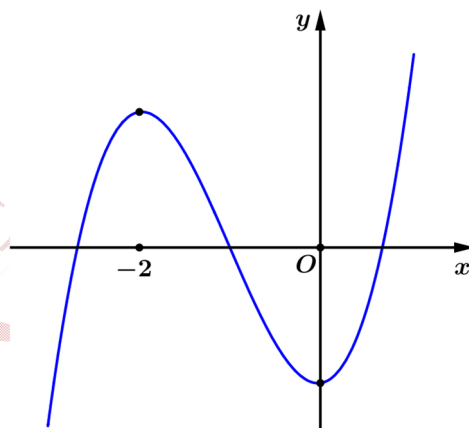
Chọn D

Ta có: $y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$

Lại có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (1; 2) \\ x = 2 \\ x = b \in (2; 3) \end{cases}; f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \in (1; 2) \\ f(x) = 2 \\ f(x) = b \in (2; 3) \end{cases}$.

Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = a; f(x) = 2; f(x) = b$ có tổng tất cả 6 nghiệm phân biệt khác các nghiệm $x = a; x = 2; x = b$. Từ đó suy ra phương trình $y' = 0$ có 9 nghiệm đơn phân biệt. Suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị $f(x)$, hàm số có hai điểm cực trị $x = -2; x = 0$ vì vậy $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm $x = -2; x = 0$ nên $f'(x) = 3a(x + 2)x$.

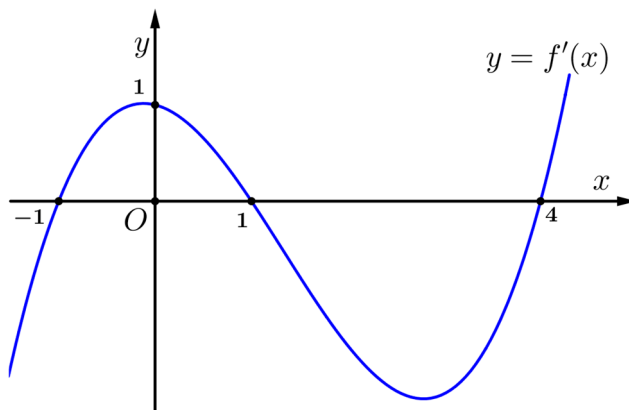
Ta có:

$$y' = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 4x) = 3a(-4x + 4)(-2x^2 + 4x)(-2x^2 + 4x + 2)$$

$y' = -48ax(x - 2)(x - 1)(x^2 - 2x - 1)$ đổi dấu khi qua các điểm $x = 0; x = 2; x = 1; x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ trên tập số thực $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x) = f(x^2 + x + 2)$ có điểm cực đại là:

A. $x = 1$.

B. $x = -\frac{1}{2}$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

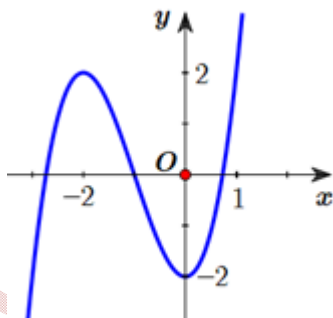
D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = (2x + 1)f'(x^2 + x + 2).$$

Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$.



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x) = (-x^2 + 3x)' \cdot f'(-x^2 + 3x) = (-2x + 3)f'(-x^2 + 3x).$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 3)f'(-x^2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 0 \\ f'(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ f'(-x^2 + 3x) = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $f'(-x^2 + 3x) = 0$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy $f'(-x^2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow$

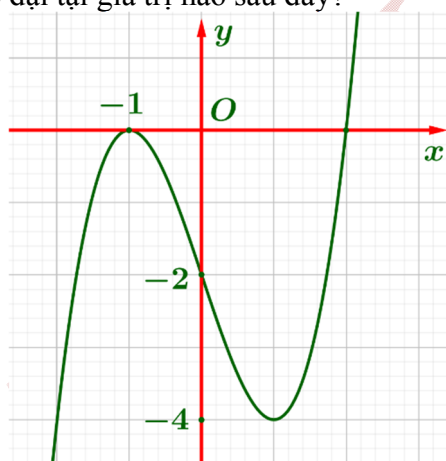
$$\begin{cases} -x^2 + 3x = 0 \\ -x^2 + 3x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ -x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$.

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$							

Nhìn vào bảng biến thiên, $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này nên hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 1)$ đạt cực đại tại giá trị nào sau đây?

A. $x = 2$.B. $x = 0$.C. $x = -1$.D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

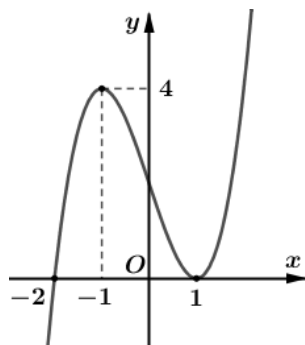
Ta có $g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x - 1)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	-1			0			1			2			3		
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	-	0	+		
$g(x)$															

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 (n_0 \text{ kép}) \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
f'	-	0	+	+	0	+
f						

Xét $g'(x) = 2f'(x)f(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x = a (a < -2) \\ x = b (b > 0) \end{cases}$ theo BBT $f(x)$

Suy hàm $g(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x = 0 \in (-1; b)$

● $x = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(0) > 0$. (1)

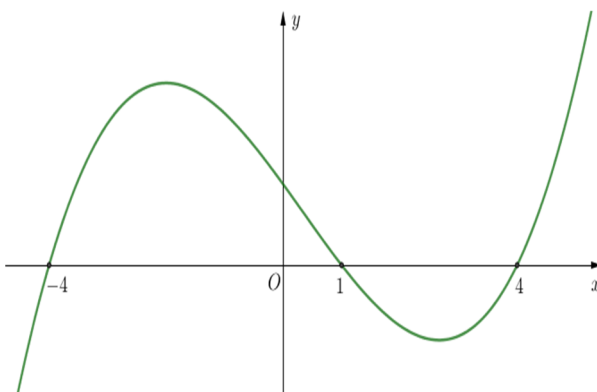
● Theo giả thiết $f(0) < 0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(0) < 0$ trên khoảng $(-1; b)$.

Nhận thấy $x = -2$; $x = a$; $x = b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Nghiệm $x = 1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi hàm số $y = f(5 - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

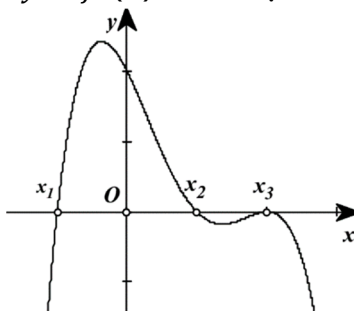


A. 7.**B.** 9.**C.** 4.**D.** 3.**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có } y' = -2xf'(5 - x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5 - x^2 = -4 \\ 5 - x^2 = 1 \\ 5 - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Ta có BBT

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$-2x$		+	+	+	0	-	-	-	
y'		-	0	+	0	-	0	+	0
y									

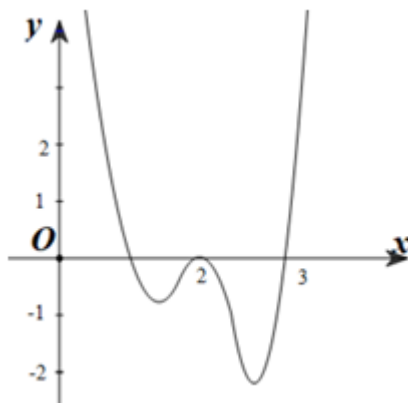
 $\Rightarrow$ hàm số $y = f(5 - x^2)$ có 7 điểm cực trị.**Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.

Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng ?

(I). Trên K , hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.(II). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_3 .(III). Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 .**A.** 3.**B.** 0.**C.** 1.**D.** 2.**Lời giải****Chọn D**Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	-	

Như vậy: trên K , hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là x_1 và điểm cực đại là x_2, x_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.**Câu 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 7

B. 9

C. 6

D. 8

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0(1) \\ f'(f(x)) = 0(2) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị trên ta thấy

+ có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 = 2 < x_3 < 3$

+ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 \in (1; 2) \\ f(x) = x_2 = 2 \\ f(x) = x_3 \in (2; 3) \end{cases}$

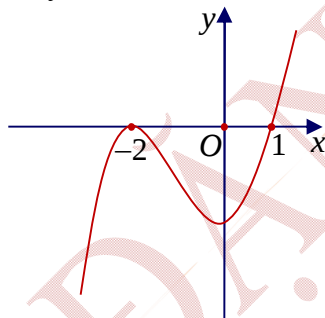
Phương trình $f(x) = x_1 \in (1; 2)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

Phương trình $f(x) = 2$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

Phương trình $f(x) = x_3 \in (2; 3)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số đã cho có 9 cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ có mấy điểm cực trị



A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2

Lời giải

Chọn C

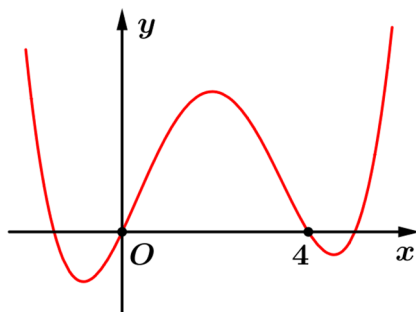
Ta có $y = f(x^2 - 4x + 1) \Rightarrow y' = (2x - 4) \cdot f'(x^2 - 4x + 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 1 = -2 \\ x^2 - 4x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1; x = 3 \\ x = 0; x = 4 \end{cases}$

Quan sát đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $f'(x)$ đổi dấu qua $x = 1$ nên hàm số $y = f(x)$ có một cực trị tại $x = 1$.

Mà $x = 1, x = 3$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ có 3 cực trị.

Câu 19. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 11.

Lời giải

Chọn CTa có $g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases}$$

□ Phương trình

$$3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

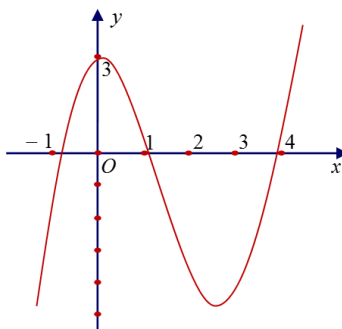
□ Phương trình

$$f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 = a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = 0 \\ x^3 + 3x^2 = 4 \\ x^3 + 3x^2 = b > 4 \end{cases}$$

Ta thấy: $x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -3$ Và $x^3 + 3x^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2$.Hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$ có $h'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:

x	$-\infty$	-3		-2		0		1	$+\infty$
$h'(x)$			+	0	-	0	+		
$h(x)$	$-\infty$	0		4		0		4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $h(x)$, ta cóPhương trình $x^3 + 3x^2 = a < 0$ có duy nhất một nghiệm $x_1 < -3$.Phương trình $x^3 + 3x^2 = b > 4$ có duy nhất một nghiệm $x_2 > 1$.Do đó, phương trình $g'(x) = 0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt và hai nghiệm bội ba nên hàm số $y = g(x)$ có 6 điểm cực trị.**Câu 22.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ



Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là

A. 2.

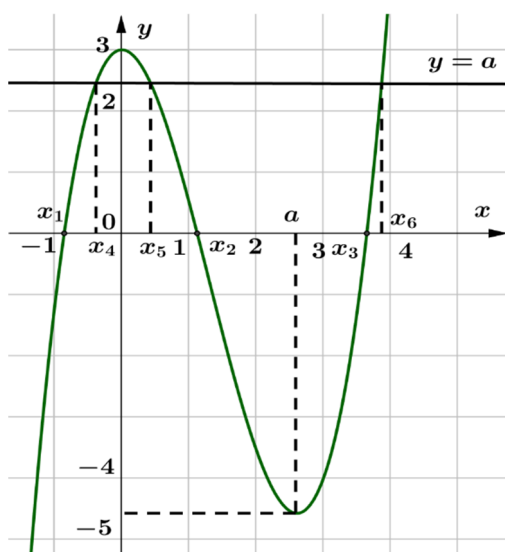
B. 8.

C. 10.

D. 6.

Lời giải

Chọn B



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a, (2 < a < 3). \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

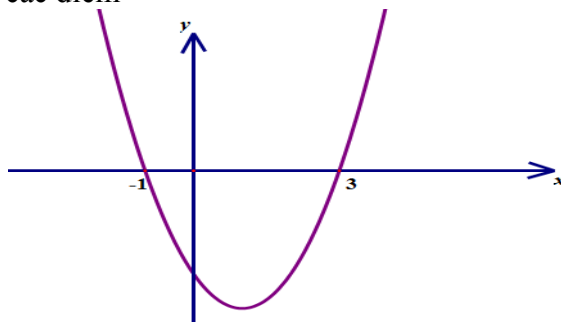
$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(1 - x^2)$ đạt cực đại tại các điểm



A. $x = -1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 0$.

D. $x = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

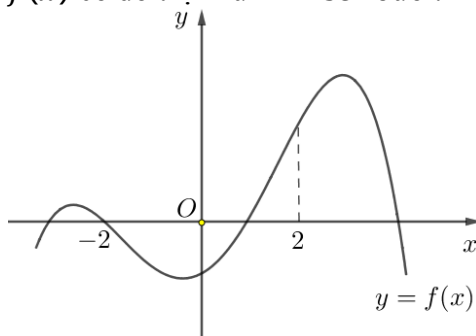
Ta có $y' = -2xf'(1-x^2)$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow -2xf'(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-x^2 = -1 \\ 1-x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = -2(l) \end{cases}$.

Bảng xét dấu của y' :

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$.

Câu 26. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 2)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -2 \\ x = b \in (-2; 2) \\ x = c > 2 \end{cases}$.

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 2)$.

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + 2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ f'(x^3 - 3x^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + 2 = a < -2 \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 + 2 = b \in (-2; 2) \quad (2) \\ x^3 - 3x^2 + 2 = c > 2 \quad (3) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$			2		-2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình (1) có 1 nghiệm $x_1 < 0$.

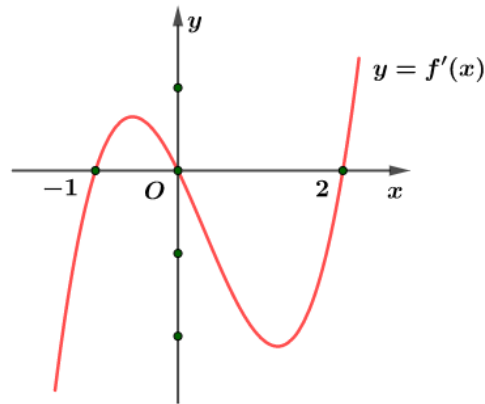
Phương trình (2) có 3 nghiệm $x_2 < 0$, $0 < x_3 < 2$, $x_4 > 2$.

Phương trình (3) có 1 nghiệm $x_5 > 2$.

Mặt khác, các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm đơn. Suy ra hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 2)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(\sqrt{1 + \sin x} - 1)$ có bao nhiêu điểm cực đại trên khoảng $(-2\pi; 2\pi)$?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{1 + \sin x} - 1)$.

Ta có: $g'(x) = (\sqrt{1 + \sin x} - 1)' \cdot f'(\sqrt{1 + \sin x} - 1) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}} f'(\sqrt{1 + \sin x} - 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f'(\sqrt{1 + \sin x} - 1) = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases}$$

$$\square \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$\square \begin{cases} f'(\sqrt{1 + \sin x} - 1) = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 + \sin x} - 1 = -1 \\ \sqrt{1 + \sin x} - 1 = 0 \\ \sqrt{1 + \sin x} - 1 = 2 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 & (\text{loại}) \\ \sin x = 0 \\ \sin x = 8 & (\text{loại}) \\ \sin x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Vì $x \in (-2\pi; 2\pi)$ nên ta có các nghiệm thỏa mãn $g'(x) = 0$ là

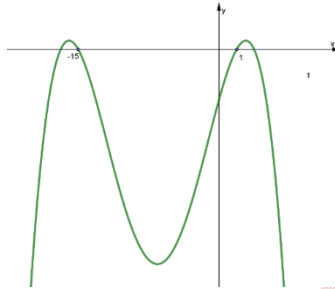
$$x_1 = -\frac{3\pi}{2}; x_2 = -\pi; x_3 = 0; x_4 = \frac{\pi}{2}; x_5 = \pi.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ trên khoảng $(-2\pi; 2\pi)$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π						
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$
y															

Từ đó suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 28. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^4 - 8x^2 + 1)$ là



A. 5.

B. 3.

C. 9.

D. 11

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (4x^3 - 16x)f(x^4 - 8x^2 + 1)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x^3 - 16x)f(x^4 - 8x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ f'(x^4 - 8x^2 + 1) = 0(1) \end{cases}$$

Đặt $t = x^4 - 8x^2 + 1$. Khi đó (1) trở thành $f'(t) = 0$

Dựa vào đồ thị hàm số trên suy ra hàm số $y = f(t)$ có 3 cực trị $\Rightarrow f'(t) = 0$ có 3 nghiệm đơn $t_1, t_2, t_3 (t_1 < t_2 < t_3)$. Với $t_1 < -15; -15 < t_2 < 1; t_3 > 1$

Xét hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 16x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			1			$+\infty$

Diagram illustrating the behavior of the function y relative to the critical points $x = -2$ and $x = 2$:

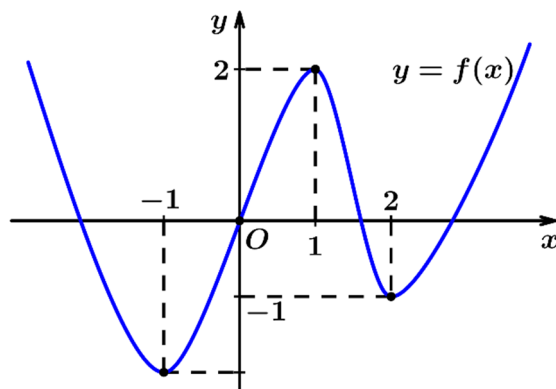
- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$.
- At $x = -2$, $y' = 0$ and $y = -15$ (local minimum).
- At $x = 0$, $y' = 0$ and $y = 1$ (local maximum).
- At $x = 2$, $y' = 0$ and $y = -15$ (local minimum).
- As $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

Ứng với nghiệm $t_1 < -15$ ta không nhận được nghiệm x nào, $-15 < t_2 < 1$ ta được 4 nghiệm $x, t_3 > 1$ ta được 2 nghiệm x suy ra phương trình (1) có 6 nghiệm đơn

Vậy $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm đơn $\Rightarrow$ hàm số $g(x) = f(x^4 - 8x^2 + 1)$ có 9 điểm cực trị

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới, đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f(f(x^2 - 1))$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 13.

B. 12.

C. 15.

D. 11.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $y = g(x) = f(f(x^2 - 1)) \Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1) \cdot f'(f(x^2 - 1))$.

$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1) \cdot f'(f(x^2 - 1)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0(1) \\ f'(f(x^2 - 1)) = 0(2) \end{cases}$$

▪ Với phương trình (1), ta có: $f'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

▪ Với phương trình (2), ta có: $f'(f(x^2 - 1)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 - 1) = -1(3) \\ f(x^2 - 1) = 1(4) \\ f(x^2 - 1) = 2(5) \end{cases}$

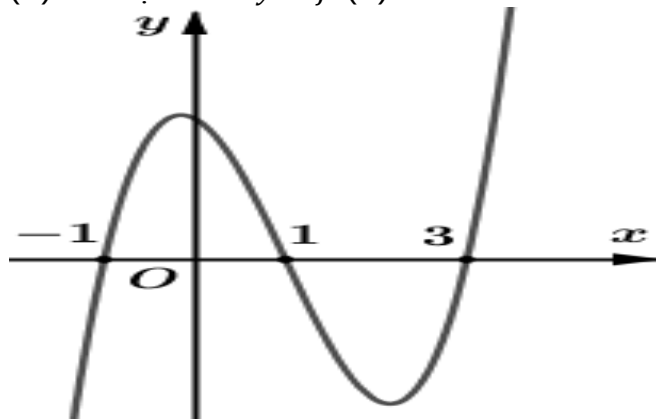
▪ Với phương trình (3) $f(x^2 - 1) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 2 \\ x^2 - 1 = a \in (-1; 0) \\ x^2 - 1 = b < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{1+a} \\ x^2 = b+1 < 0 \end{cases}$

▪ Với phương trình (4) $f(x^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = c < -1 \\ x^2 - 1 = d \in (0; 1) \\ x^2 - 1 = g \in (1; 2) \\ x^2 - 1 = h > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = c+1 < 0 \\ x = \pm\sqrt{1+d} \\ x = \pm\sqrt{1+g} \\ x = \pm\sqrt{1+h} \end{cases}$

▪ Với phương trình (5) $f(x^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = k < -1 \\ x^2 - 1 = l > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = k+1 < 0 \\ x = \pm\sqrt{1+l} \end{cases}$

Vậy $x = 0; x = \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{1+a}; \pm\sqrt{1+d}; \pm\sqrt{1+g}; \pm\sqrt{1+h}; \pm\sqrt{1+l}$ là các điểm cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3})$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

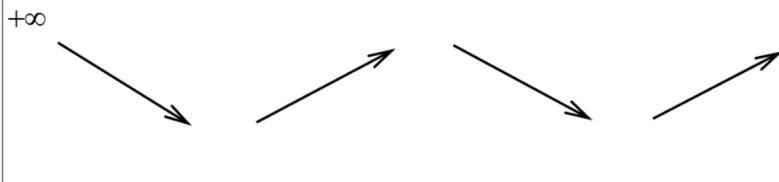
C. 2.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$									$+\infty$

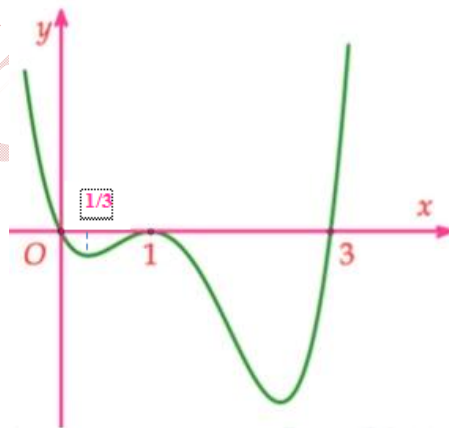
Ta có $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3}) \Rightarrow g'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot f'(\sqrt{x^2 + 4x + 3})$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ f'(\sqrt{x^2+4x+3})=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+4x+3}=1 \\ \sqrt{x^2+4x+3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2+4x+2=0 \\ x^2+4x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \pm \sqrt{2} \\ x=-2 \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

Vì $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 4x + 3})$ có 5 điểm cực trị.

Câu 33. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^3 + x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5.

B. 11.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 2x)f'(x^3 + x^2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 2x)f'(x^3 + x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x = 0(a) \\ f'(x^3 + x^2) = 0(b) \end{cases}$$

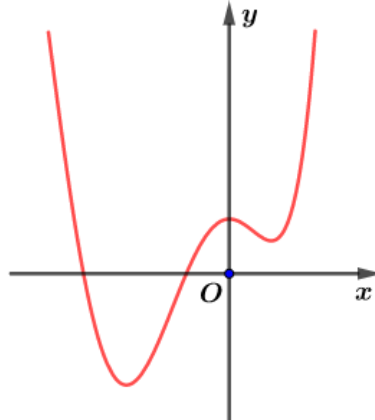
$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có:

$$(b) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 = \frac{1}{3} (1) \\ x^3 + x^2 = 1 (2) \\ x^3 + x^2 \approx 2,5 (3) \end{cases}$$

Ta thấy các phương trình (1), (2), (3) đều có một nghiệm thực đơn không trùng nhau và đều không trùng nghiệm x_1, x_2 . Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm thực đơn phân biệt do đó hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có 3 cực trị và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số cực trị của hàm số $y = f\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

A. 3.

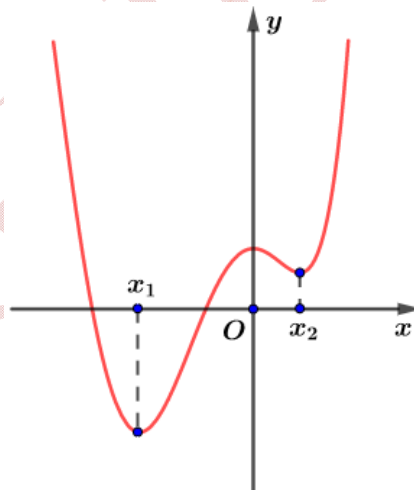
B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D



Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-1}{3(x-1)^2} \cdot f'\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{3(x-1)^2} \cdot f'\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} = x_1 < 0 \text{ (VN)} \\ \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \text{ (VN)} \\ \frac{1}{(x-1)^2} = x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

$$\text{Cho } a > 1 + \frac{1}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow b = \frac{1}{(a-1)^2} > x_2$$

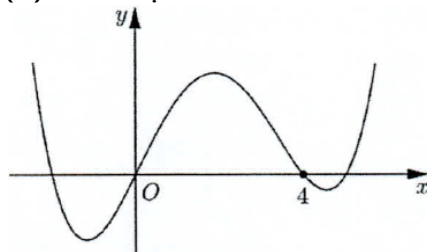
$$y'(a) = \frac{-1}{3(a-1)^2} \cdot f' \left(\frac{1}{(a-1)^2} \right) = \frac{-1}{3(a-1)^2} \cdot f'(b) < 0.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$1 - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$	1	$1 + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y						

Dựa vào BBT ta có hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 37. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^3 - 3x^2 + 4)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $g'(x) = -(3x^2 + 6x)f'(-x^3 - 3x^2 + 4)$.

$$\text{nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(-x^3 - 3x^2 + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = -2(1) \\ x^3 + 3x^2 = 4 - a, a < 0(2) \\ x^3 + 3x^2 = 4 - b, 0 < b < 4(3) \\ x^3 + 3x^2 = 4 - c, c > 4(4) \end{cases}$$

+) Ta có (1) có hai nghiệm đơn là $x_1 = 0, x_2 = -2$.

+) Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có $y'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy:

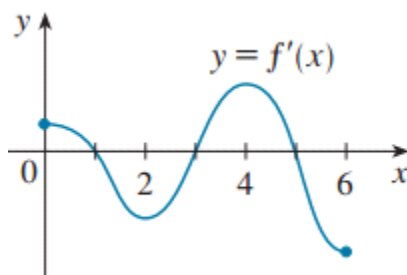
+ Phương trình (2) có một nghiệm duy nhất là $x_3 > 1$.

+ Phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt là $-3 < x_4 < -2 < x_5 < 0 < x_6 < 1$.

+ Phương trình (4) có một nghiệm duy nhất là $x_7 < -3$.

Vậy $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm lặp bội lẻ do đó hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2 + 2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 6]$.



A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2f(x)f'(x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$

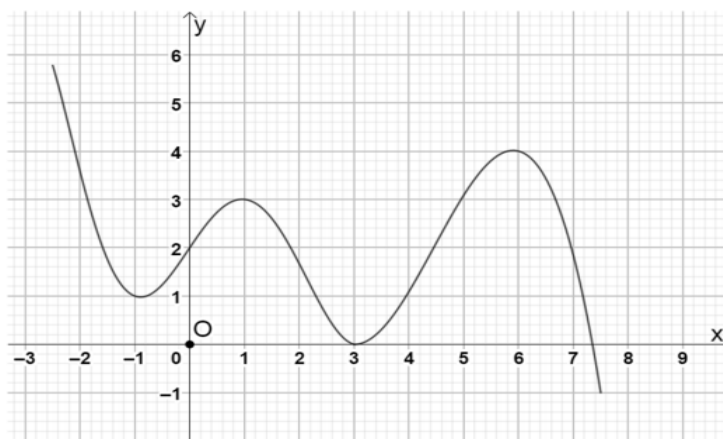
Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$:

x	0	1	3	5	6
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt trong $[0; 6]$ là $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \in (1; 3)$, $x_3 \in (3; 5)$, $x_4 \in (5; 6)$.

Vậy hàm số $y = [f(x)]^2 + 2019$ có tối đa 7 điểm cực trị trên đoạn $[0; 6]$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = 2020^{f(f(x)-1)}$ là

A. 13.

B. 12.

C. 10.

D. 14.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $g(x) = 2020^{f(f(x)-1)}$. Ta có:

$$g'(x) = 2020^{f(f(x)-1)} \cdot \ln 2020 \cdot [f(f(x) - 1)]' = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1) \cdot 2020^{f(f(x)-1)} \cdot \ln 2020.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0(1) \\ f'(f(x) - 1) = 0(2) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy (1) có tập nghiệm $S = \{-1; 1; 3; 6\}$, các nghiệm này đều là nghiệm bội lẻ.

$$f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = -1 \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = 3 \\ f(x) - 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0(3) \\ f(x) = 2(4) \\ f(x) = 4(5) \\ f(x) = 7(6) \end{cases}$$

(3) có 1 nghiệm đơn không thuộc S và 1 nghiệm bội chẵn $x = 3$.

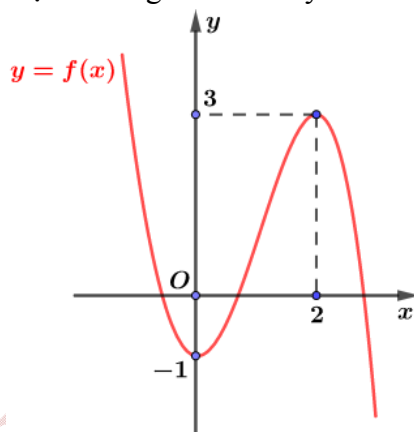
(4) có 5 nghiệm đơn phân biệt không thuộc S .

(5) có 1 nghiệm đơn không thuộc S và 1 nghiệm bội chẵn $x = 6$.

(6) có 1 nghiệm đơn không thuộc S .

Chú ý rằng các nghiệm của (3), (4), (5), (6) là khác nhau nên từ các nhận xét trên suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 12 nghiệm, các nghiệm này đều là nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ. Do đó số điểm cực trị của hàm số $y = 2020^{f(f(x)-1)}$ là 12.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Giá trị của x_0 thuộc khoảng nào sau đây?



A. (1; 3).

B. (-1; 1).

C. (0; 2).

D. (3; $+\infty$).

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)$

$$\text{Cho: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 0 & (1) \\ f'(x^3 + x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy (1) vô nghiệm.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$\text{Vậy } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x = 0 \\ x^3 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + 1) = 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Với $x < 0$, ta có: $x^3 + x < 0 \Rightarrow f'(x^3 + x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.

Với $0 < x < 1$, ta có: $0 < x^3 + x < 2 \Rightarrow f'(x^3 + x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$.

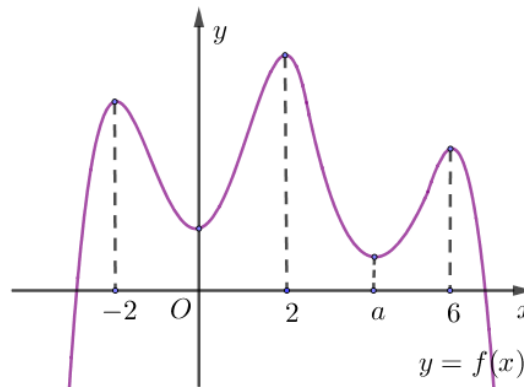
Với $x > 1$, ta có: $x^3 + x > 2 \Rightarrow f'(x^3 + x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$							

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 0 \in (-1; 1)$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là



A. 11.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Lưu ý: Số điểm cực trị của hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ là số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội bậc lẻ của phương trình $y' = 0$

Ta có: $y' = (6x^5 - 6x) \cdot f'(x^6 - 3x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 - 6x = 0(1) \\ f'(x^6 - 3x^2) = 0(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

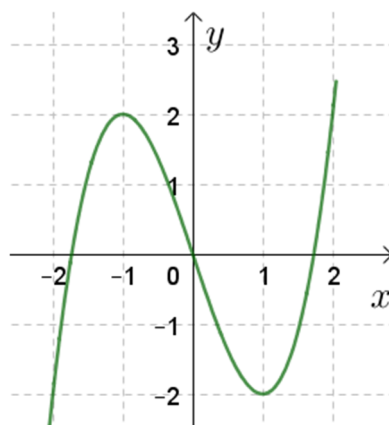
$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 - 3x^2 = -2 \\ x^6 - 3x^2 = 0 \\ x^6 - 3x^2 = 2 \\ x^6 - 3x^2 = a \\ x^6 - 3x^2 = 6 \end{cases} (*)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 (t \geq 0), \text{ khi đó ta thu } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 3t = -2(3) \\ t^3 - 3t = 0(4) \\ t^3 - 3t = 2(5) \\ t^3 - 3t = a(6) \\ t^3 - 3t = 6(7) \end{cases}$$

Nhận thấy, với mỗi $t > 0$ là nghiệm của một trong các phương trình từ đến ta thu được hai nghiệm x tương ứng đối nhau, với $t = 0$ ta được nghiệm kép $x = 0$.

Do đó ta chỉ quan tâm nghiệm $t > 0$,

Xét hàm số $g(t) = t^3 - 3t$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Từ đồ thị ta thấy:

Phương trình (3) có nghiệm kép $t_1 = 1$, trường hợp này ta không có cực trị.

Phương trình (4) có một nghiệm $1 < t_2 < 2$, trường hợp này ta được 2 điểm cực trị.

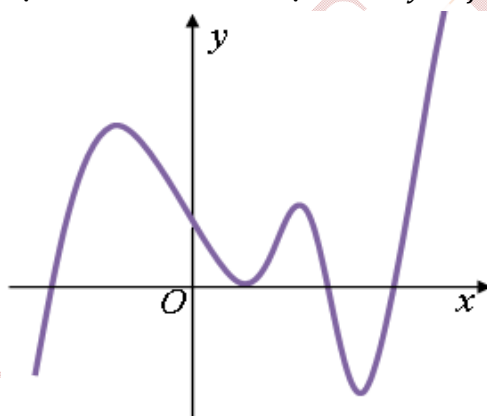
Phương trình (5) có một nghiệm $t_3 = 2$, trường hợp này ta được 2 điểm cực trị.

Phương trình (6) với $4 < a < 6$ ta được một nghiệm $t_4 > t_3 = 2$, ta được 2 điểm cực trị.

Phương trình (7) với $a < 6$ ta được 1 nghiệm $t_5 > t_4$, trường hợp này ta được 2 điểm cực trị.

Vậy tổng cộng ta được 11 điểm cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 90x + 2021})$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 7.

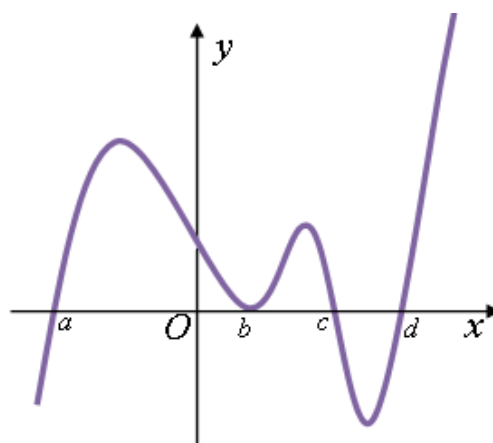
B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn B



+ Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \\ x = d \end{cases}$ (trong đó $a < 0 < b < c < d$ và $x = b$ là nghiệm

bội chẵn)

Hàm số: $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 90x + 2021})$, với điều kiện: $x^2 - 90x + 2021 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 43 \\ x \geq 47 \end{cases}$

Ta có: $g'(x) = \frac{2x-90}{2\sqrt{x^2-90x+2021}} \cdot f'(\sqrt{x^2-90x+2021})$

+ $g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-90=0 \\ f'(\sqrt{x^2-90x+2021})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=45 \\ \sqrt{x^2-90x+2021}=a \\ \sqrt{x^2-90x+2021}=b \text{ (do điều kiện nên loại)} \\ \sqrt{x^2-90x+2021}=c \\ \sqrt{x^2-90x+2021}=d \end{cases}$

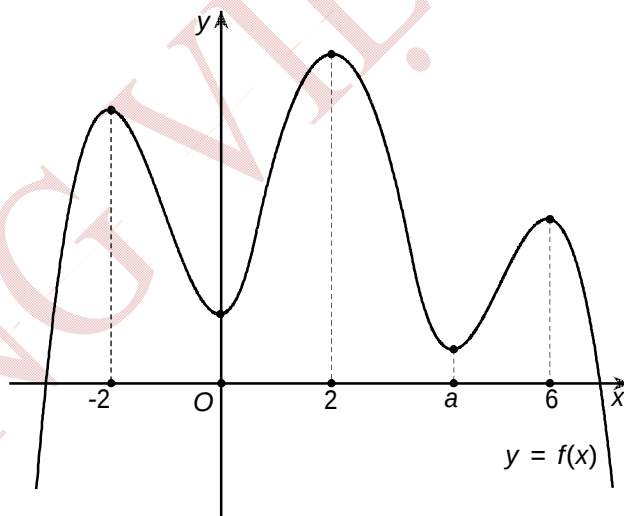
ng nghiệm $x = 45$ và vì $a < 0$ nên phương trình $\sqrt{x^2 - 90x + 2021} = a$ vô nghiệm)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-90x+2021}=b \\ \sqrt{x^2-90x+2021}=c \\ \sqrt{x^2-90x+2021}=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-45)^2-4=b^2 \\ (x-45)^2-4=c^2 \\ (x-45)^2-4=d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=45 \pm \sqrt{4+b^2} \\ x=45 \pm \sqrt{4+c^2} \\ x=45 \pm \sqrt{4+d^2} \end{cases}$

Trong các nghiệm trên, nghiệm $x = 45 \pm \sqrt{4+b^2}$ là nghiệm bội chẵn. Do đó hàm số chỉ đạt cực trị tại các điểm có hoành độ là $x = 45 \pm \sqrt{4+c^2}$ và $x = 45 \pm \sqrt{4+d^2}$.

Vậy hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 90x + 2021})$ có 4 cực trị.

Câu 48. Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

A. 8.

B. 11.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

$g(x) = f(x^6 - 3x^2)$.

$g'(x) = (f(x^6 - 3x^2))' = (x^6 - 3x^2)' \cdot f'(x^6 - 3x^2) = (6x^5 - 6x)f'(x^6 - 3x^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow (6x^5 - 6x)f'(x^6 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'(x^6 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2(1) \\ x^6 - 3x^2 = 0(2) \\ x^6 - 3x^2 = 2(3) \\ x^6 - 3x^2 = a(4) \\ x^6 - 3x^2 = 6(5) \end{cases}$$

$$x^6 - 3x^2 = -2(1) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$x^6 - 3x^2 = 0(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0(*) \\ x^4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt[4]{3} \end{cases}$$

$$x^6 - 3x^2 = 2(3) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}.$$

Ta xét bảng biến thiên của hàm số:

$$y = h(x) = x^6 - 3x^2$$

$$y' = h'(x) = 6x^5 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow h(-1) = -2 \\ x = 1 \Rightarrow h(1) = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$				0				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -2 -2

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $x^6 - 3x^2 = a(4)$ có một nghiệm biệt khác $\{0; -1; 1\}$ và khác nghiệm của phương trình (2); (3)

Phương trình $x^6 - 3x^2 = 6(5)$ có hai nghiệm phân biệt khác $\{0; -1; 1\}$ và khác nghiệm của phương trình (2); (3); (4). Ta có thể lấy nghiệm gần đúng như sau:

$$x^6 - 3x^2 = 6(5) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = m, m \approx 5,547, m \in (5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 2,355 \\ x \approx -2,355 \end{cases}$$

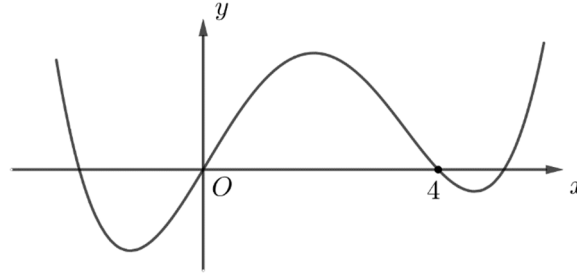
$$\begin{cases} x^6 - 3x^2 = a(4) \\ 4 < a < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x^6 - 3x^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} n < x^2 < \sqrt{m} \\ n \approx 2,195 \\ m \approx 2,355 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[4]{m} < x < -\sqrt{n} \\ \sqrt{n} < x < \sqrt[4]{m} \end{cases}$$

Vậy $y' = g'(x) = 0$ có:

- +) 2 nghiệm bằng $x = 1 \Rightarrow x = 1$ không là điểm cực trị.
- +) 2 nghiệm bằng $x = -1 \Rightarrow x = -1$ không là điểm cực trị.
- +) 3 nghiệm bằng $x = 0 \Rightarrow x = 0$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt[4]{3} \Rightarrow x = -\sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt[4]{3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt{m} \Rightarrow x = \sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt{m} \Rightarrow x = -\sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm x_1 và $x_1 \in (-\sqrt{m}; -\sqrt{n}) \Rightarrow x_1$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm x_2 và $x_2 \in (\sqrt{n}; \sqrt{m}) \Rightarrow x_2$ là 1 điểm cực trị.

Vậy có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-x^4 + 4x^2)$ là

A. 5.

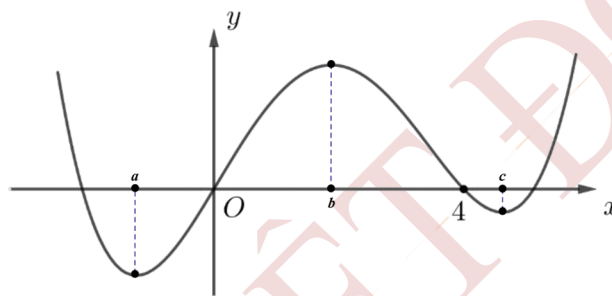
B. 3.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$$g(x) = f(-x^4 + 4x^2) \Rightarrow g'(x) = (-x^4 + 4x^2)' f'(-x^4 + 4x^2) = (-4x^3 + 8x) f'(-x^4 + 4x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-4x^3 + 8x) f'(-x^4 + 4x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^3 + 8x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \\ -x^4 + 4x^2 = a < 0 & (1) \\ -x^4 + 4x^2 = b \in (0; 4) & (2) \\ -x^4 + 4x^2 = c > 4 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = -x^4 + 4x^2 \Rightarrow h'(x) = -4x^3 + 8x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	4	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

Đường thẳng $y = a < 0$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 2 điểm

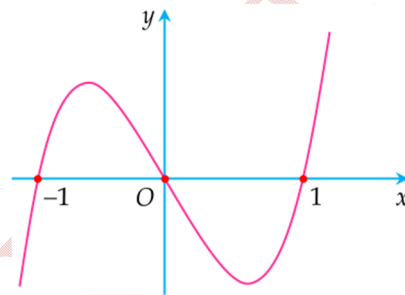
Đường thẳng $y = b \in (0; 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 4 điểm.

Đường thẳng $y = c > 4$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 0 điểm.

Như vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

A. 7.

B. 11.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị $f'(x)$ đi qua các điểm $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$ nên ta có $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$.

Do đó $f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$.

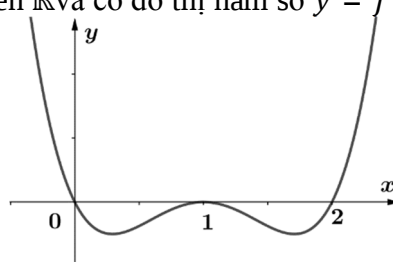
Đặt $g(x) = f(f'(x))$.

Ta có:

$g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x) = [(x^3 - x)^3 - (x^3 - x)](3x^2 - 1) = x(x^2 - 1)(x^3 - x + 1)(3x^2 - 1)$.

Dễ thấy $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, tất cả đều là nghiệm đơn nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{5(-x^2+4)}{(x^2+4)^2} \cdot f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$.

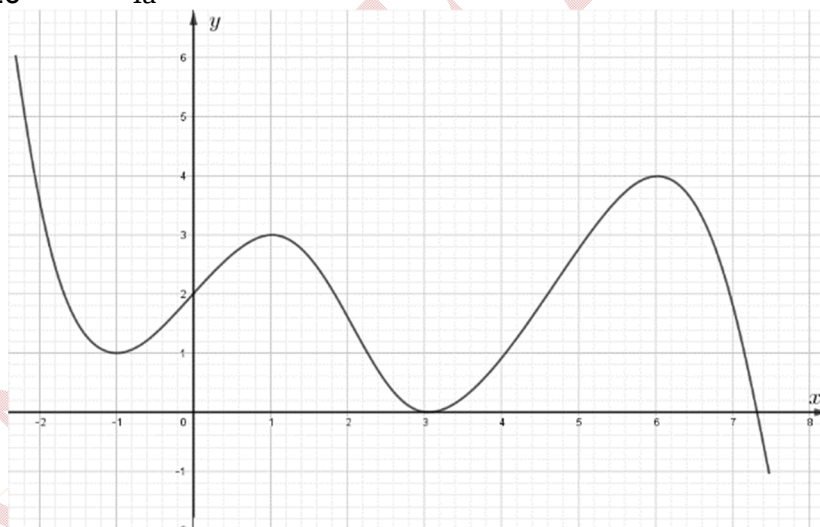
$$+ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{x^2+4} = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 1 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 2 \\ -x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (nghiễm béi chẵn)} \\ x = 4 \text{ (nghiễm béi chẵn)} \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2020^{f(f(x)-1)}$ là



A. 13.

B. 12.

C. 10.

D. 14.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = f(x) - 1$ ta có $y = 2020^{f(u)}$ và $u'_x = f'(x)$.

$$y' = f'_u(u) \cdot u'_x \cdot 2020^{f(u)} \ln 2020.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x = 0 \\ f'_u(u) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ ta có } u'_x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = 6 \end{cases}.$$

$$f'_u(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = 1 \\ u = 3 \\ u = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x) = 4 \\ f(x) = 7 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

- + Phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm đơn $x_1 > 7$.
- + Phương trình $f(x) = 2$ có năm nghiệm đơn x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 thỏa mãn $-2 < x_2 < -1, x_3 = 0, 1 < x_4 < 2, 4 < x_5 < 5, 6 < x_6 < 7$.
- + Phương trình $f(x) = 4$ có một nghiệm đơn $x_7 < -2$.
- + Phương trình $f(x) = 7$ có một nghiệm đơn $x_8 < x_7$.

Vậy $y' = 0$ có tất cả 12 nghiệm đơn, do đó hàm số $y = 2020^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

Dạng 2: Cực trị $f(x), f(u), \dots$ biết các BBT, BXD không tham số (Không GTTĐ)

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y						

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(3-x)$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-x) = 0 \xrightarrow{\text{theo BBT}} \begin{cases} 3-x=0 \\ 3-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$
- $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
g'		+	0	-		+	0	-
g			2			3		
		</						

Vậy hàm số $g(x) = f(3-x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	3	-2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(6 - 3x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -3.f'(6 - 3x)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x = -3 \\ 6 - 3x = 1 \\ 6 - 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

Nhận xét: y' đổi dấu 3 lần khi đi qua các nghiệm nên phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y = f(6 - 3x)$ có 3 cực trị.

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$			2019		$-\infty$

Diagram illustrating the mapping of x to y based on the sign of y' :

- For $x < x_1$, y' is negative, and y decreases from $+\infty$ to $-\infty$.
- At $x = x_1$, $y' = 0$, and y is at a local minimum.
- For $x_1 < x < x_2$, y' is positive, and y increases from the local minimum to a local maximum at $x = x_2$.
- At $x = x_2$, $y' = 0$, and y is at a local maximum.
- For $x > x_2$, y' is negative, and y decreases from the local maximum to $-\infty$.

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2001) - 2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Công thức tổng quát tìm số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ có công thức tính là $S = a + b$.

Trong đó

$\square$ a là số điểm cực trị của hàm số gốc $y = f(x)$

$\square$ b là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox (không tính điểm tiếp xúc)

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Số điểm cực trị của đồ thị $y = f(x - 2001) - 2019$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$, tức là có số điểm cực trị là $a = 2$.

Xét phương trình $f(x - 2001) - 2019 = 0 \Leftrightarrow f(x - 2001) = 2019$ (1)

Theo phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x - 2001)$ cắt đường thẳng $y = 2019$ tại 2 điểm (trong đó có 1 điểm tiếp xúc tại x_2)

Nên suy ra $b = 1$ (vì điểm tiếp xúc phải loại)

Vậy $S = 2 + 1 = 3$.

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$
$f(x)$								

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

$-\infty$

$-\infty$

4

2

7

<

Hỏi hàm số $y = g(x) = [f(2 - x)]^2 + 2020$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = -2 \cdot f(2-x) \cdot f'(2-x)$.

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot f(2-x) \cdot f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2-x) = 0 \\ f'(2-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = a < -2 \\ 2-x = b > 1 \\ 2-x = -2 \\ 2-x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2-a > 4 \\ x = 2-b < 1 \\ x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

 $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow f'(2-x)$ không xác định $\Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta thấy $f(2-x) > 0 \Leftrightarrow a < 2-x < b \Leftrightarrow 2-b < x < 2-a$

$$f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -2 \\ 0 < 2-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$2-b$	1	2	4	$2-a$	$+\infty$
$f'(2-x)$	-	-	0	+	-	0	+
$f(2-x)$	-	0	+	+	+	0	-
y'	-	0	+	0	-	+	0

Vậy hàm số $y = g(x) = [f(2-x)]^2 + 2020$ có 2 điểm cực đại.**Câu 92.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

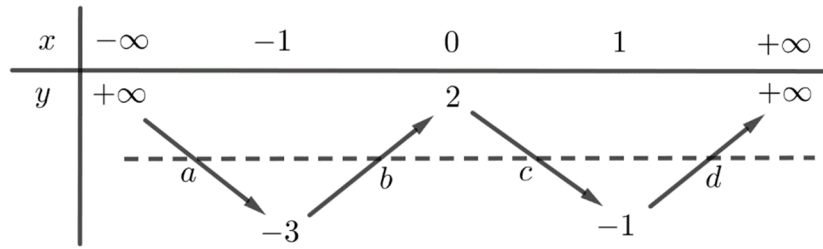
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)$ có TXĐ: $\mathbb{R}$ và $g'(x) = 2(x-1) \cdot f'(x^2 - 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

(vì phương trình $x^2 - 2x = -2$ vô nghiệm)Từ giả thiết suy ra: Các nghiệm -2; 3 của f' là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên f' đổi dấu khi qua mỗi nghiệm đó, còn 1 là nghiệm bội chẵn nên f' không đổi dấu khi qua nghiệm 1. $\Rightarrow g'$ đổi dấu khi qua mỗi nghiệm ± 1 ; 3 và ko đổi dấu khi qua mỗi nghiệm $1 \pm \sqrt{2}$. $\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.**Câu 94.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



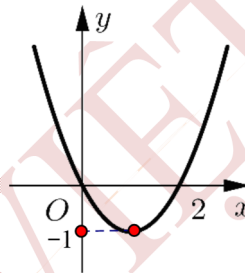
Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm tương ứng là

$$\begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x)$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \quad (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (3) \\ x^2 - 2x = d \quad (4) \end{cases}$

Vẽ đồ thị hàm số $h(x) = x^2 - 2x$



Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình (2); (3); (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm. Các nghiệm đều phân biệt nhau.

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 1 - |x - 1|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 8.

B. 7.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 1 - |x - 1|)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = (x^2 - 2x + 1 - |x - 1|)' \cdot f'(x^2 - 2x + 1 - |x - 1|)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x + 1 - |x - 1|)' = 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1 - |x - 1|) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 - (|x - 1|)' = 0 \\ x^2 - 2x + 1 - |x - 1| = -1 \\ x^2 - 2x + 1 - |x - 1| = 0 \\ x^2 - 2x + 1 - |x - 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 - (|x - 1|)' = 0(1) \\ |x - 1|^2 - |x - 1| = -1(2) \\ |x - 1|^2 - |x - 1| = 0(3) \\ |x - 1|^2 - |x - 1| = 1(4) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 - 1 = 0 & \text{kh} x \geq 1 \\ 2x - 2 + 1 = 0 & \text{kh} x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} & \text{kh} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{2} & \text{kh} x < 1 \end{cases},$$

$$(2) \Leftrightarrow |x - 1|^2 - |x - 1| + 1 = 0 \text{ vô nghiệm},$$

$$(3) \Leftrightarrow |x - 1|^2 - |x - 1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = 0 \\ |x - 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0, \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow |x - 1|^2 - |x - 1| - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} (l) \\ |x - 1| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ta có $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x)$. Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Trong đó các nghiệm $-1, 1, 3$ là nghiệm bội lẻ và $1 \pm \sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1, 1, 3$.

Ta có $g'(0) = -2f'(0) < 0$ (do $f'(0) > 0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có đúng 1 điểm cực tiểu là $x = 1$.

Câu 106. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây, giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với Ox là $O(0; 0); A(-1; 0); B(1; 0)$

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	1	$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$-\infty$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

A. 7.

B. 11.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Từ giả thiết, có đồ thị hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $O(0; 0); A(-1; 0); B(1; 0)$.

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c = 0 \\ a + b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$.

Đặt: $g(x) = f(f'(x))$

Ta có: $g'(x) = (f[f'(x)])' = f'[f'(x)] \cdot f''(x) = [(x^3 - x)^3 - (x^3 - x)](3x^2 - 1)$
 $= x(x-1)(x+1)(x^3 - x - 1)(x^3 - x + 1)(3x^2 - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = a (\approx 0,76) \\ x = b (b \approx -1,32) \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	b	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	1	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

* Cách xét dấu $g'(x)$: chọn $x = 2 \in (1; +\infty)$ ta có: $g'(2) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in (1; +\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		4		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[(x+1)^2]$ là

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = f[(x+1)^2] = f(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow g'(x) = (2x+2) \cdot f'(x^2 + 2x + 1)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ f'(x^2+2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+2x+1=a, a<0 \\ x^2+2x+1=b, 0<b<3 \\ x^2+2x+1=c, c>3 \end{cases}$$

$\square x^2 + 2x + 1 - a = 0$ có $\Delta = 4a < 0, a < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

$\square x^2 + 2x + 1 - b = 0$ có $\Delta = 4b > 0, 0 < b < \frac{1}{2}$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$\square x^2 + 2x + 1 - c = 0$ có $\Delta = 4c > 0, c > 3$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 5 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f[(x+1)^2]$ có 5 cực trị.

Câu 109. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây, giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với Ox là $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	1	$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$-\infty$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

A. 7.

B. 11.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Từ giả thiết, có đồ thị hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$.

$$\text{Khi đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} c=0 \\ a+b=-1 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$$

Đặt: $g(x) = f(f'(x))$

$$\text{Ta có: } g'(x) = (f[f'(x)])' = f'[f'(x)] \cdot f''(x) = [(x^3 - x)^3 - (x^3 - x)](3x^2 - 1)$$

$$= x(x-1)(x+1)(x^3 - x - 1)(x^3 - x + 1)(3x^2 - 1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=a(\approx 1,32) \\ x=b(b \approx -1,32) \\ x=\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	b	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	a	$+\infty$			
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g												

* Cách xét dấu $g'(x)$: chọn $x = 2 \in (a; +\infty)$ ta có: $g'(2) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in (a; +\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 110. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$f'(x)$				

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ là

A. 6.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \\ f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2+1}{x} = a, a < -2 \\ \frac{x^2+1}{x} = b, -2 < a < 2 \\ \frac{x^2+1}{x} = c, c > 2 \end{cases}$$

$\square x^2 - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

$\square$ Xét hàm số $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

$\square h(x) = a$ có 2 nghiệm phân biệt, với $a < -2$

□ $h(x) = b$ vô nghiệm, với $-2 < b < 2$

□ $h(x) = c$ có 2 nghiệm phân biệt, với $c > 2$

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 điểm cực trị.

Dạng 3: Cực trị $f(x)$, $f(u)$,... liên quan biểu thức đạo hàm không tham số (Không GTTĐ)

Câu 111. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

Ta có $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \leq -1 \\ 1 \leq 3 - x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 114. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 1)(13x - 15)^3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)' \cdot f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) = \frac{5(x^2+4) - 5x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4} - 1\right) \left(13 \cdot \frac{5x}{x^2+4} - 15\right)^3 \\ &= \frac{-5x^2 + 20}{(x^2+4)^2} \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x - x^2 - 4}{x^2+4}\right) \left(\frac{65x - 15x^2 - 60}{x^2+4}\right)^3 \\ &= \frac{5(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2} \cdot \frac{(5x)^2}{(x^2+4)^2} \cdot \frac{(x-1)(4-x)}{x^2+4} \cdot \frac{(3-x)^3(15x-20)^3}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \\ x = 3 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Do phương trình $y' = 0$ có 6 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép nên hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$ và $f(2) = 1$. Hàm số $g(x) = [f(x^2)]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên của $y = f(x)$

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$f(-1)$		$+\infty$
					1	

Từ BBT suy ra $f(x) > 0, \forall x \geq 0$ nên $f(x^2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $g(x) = [f(x^2)]^2$ $g'(x) = ((f(x^2))^2)' = 4x \cdot f(x^2)f'(x^2) = 4x(x^2-2)(x^2+5)(x^2+1)f(x^2)$

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

BBT của $g(x) = [f(x^2)]^2$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Từ BBT trên suy ra hàm số $g(x) = [f(x^2)]^2$ có ba điểm cực trị.

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x \cdot (x-1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x^2+x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Xét đạo hàm $y' = (2x + 1)f'(x^2 + x)$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)f'(x^2 + x) = 0$

Thay x bởi $(x^2 + x)$ ta có $f'(x^2 + x) = (x^2 + x) \cdot (x^2 + x - 1)^3$

Khi đó $(2x + 1)f'(x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x^2 + x) \cdot (x^2 + x - 1)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)x(x + 1) \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \cdot \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 0 \quad (1)$$

Ta thấy phương trình (1) có 5 nghiệm bội lẻ phân biệt nên $f'(x)$ đổi dấu 5 lần qua các nghiệm.

Vậy hàm số $y = f(x^2 + x)$ có 5 cực trị.

Câu 120. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị là 0; 1; 2 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(4x - 4x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn D**

Ta có:

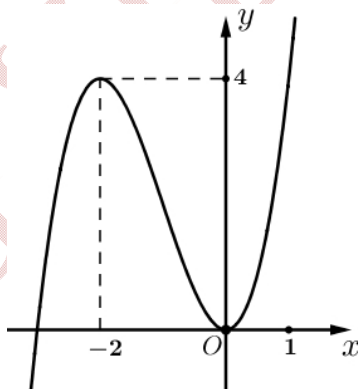
$$y' = (4 - 8x)f'(4x - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 8x = 0 \\ f'(4x - 4x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 4x - 4x^2 = 0 \\ 4x - 4x^2 = 1 \\ 4x - 4x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(4x - 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\right)$$

$y' = 0$ có 2 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội 3 nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Dạng 4: Cực trị của hàm liên kết $h(x) = f(u) + g(x)$ biết các BBT, đồ thị không tham số

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = g(x) = f(x) - 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

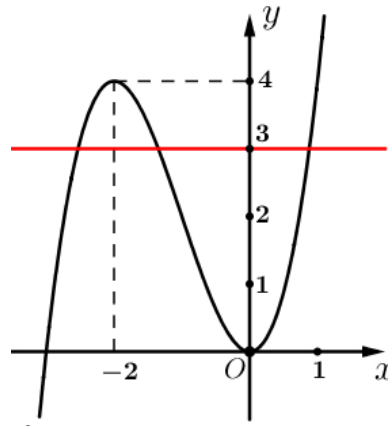
D. 4.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $g'(x) = (f(x) - 3x)' = f'(x) - 3$;

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3$

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ nhận thấy phương trình $f'(x) = 3$ có 3 nghiệm phân biệt.



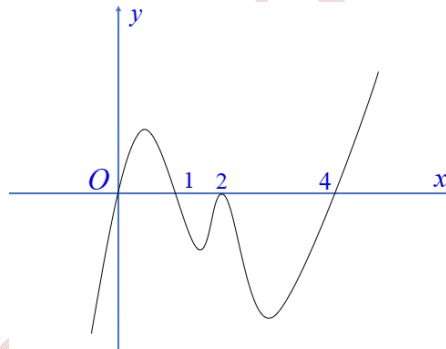
Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

g_1 g_2 g_3

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$, nhận xét hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2019) - 2020x + 2021$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

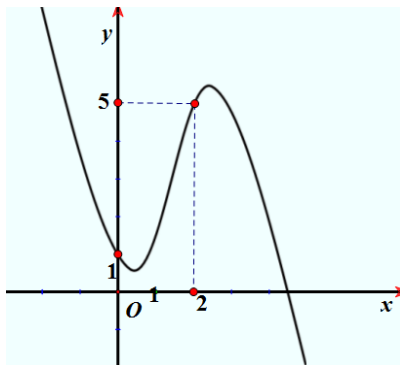
Chọn B

Ta có $y' = [f(x - 2019) - 2020x + 2021]' = f'(x - 2019) - 2020$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x - 2019) - 2020$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2017 đơn vị và tịnh tiến xuống dưới 2018 đơn vị.

Do đó đồ thị hàm số $y = f'(x - 2019) - 2020$ chỉ cắt trục hoành tại 1 điểm và đổi dấu qua điểm đó nên hàm số $y = f(x - 2019) - 2020x + 2021$ có một điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

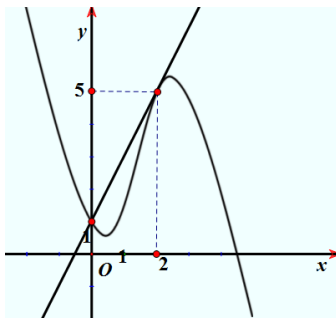
- A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị.
- D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = f'(x) - 2x - 1$.

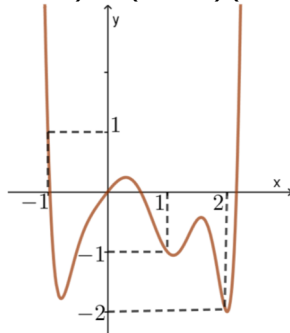
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1$ (1).



Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ ta có thể nhận thấy phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 2$.

Xét dấu $x = 1 \in (0; 2)$, ta có $y'(1) = f'(1) - 5 < 0$ từ đó ta nhận định hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$. Ta chọn đáp án A

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm số cực trị của hàm số $g(x) = 2f(x + 2) + (x + 1)(x + 3)$.



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

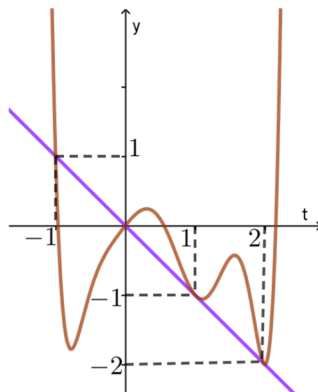
Chọn A

$$g(x) = 2f(x + 2) + (x + 1)(x + 3) \Rightarrow g'(x) = 2f'(x + 2) + 2x + 4$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x + 2) = -(x + 2) \quad (1).$$

Đặt $t = x + 2$.

Khi đó (1) trở thành $f'(t) = -t \quad (2).$



(2) là pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -t$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(t)$ và $y = -t$.

Ta có: $f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$.

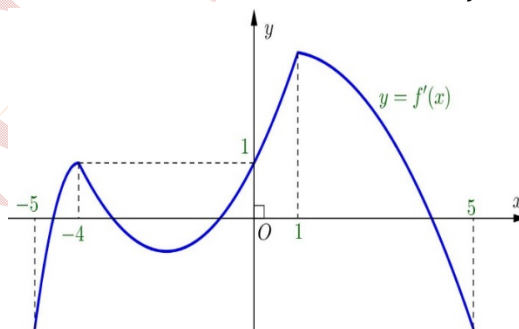
Khi đó $\begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên hàm số

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$					$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có hai cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$.

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = (2x + 4)f'(x^2 + 4x) - (2x + 4) = (2x + 4)[f'(x^2 + 4x) - 1]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ f'(x^2 + 4x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 4x = -4 \\ x^2 + 4x = 0 \\ x^2 + 4x = a \in (1; 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = -4 \\ x = -2 \pm \sqrt{4 + a} \end{cases}.$$

Vì $a \in (1; 5)$ nên $-2 \pm \sqrt{4 + a} \in (-5; 1)$.

Dễ thấy y' đổi dấu khi qua các nghiệm kể trên.

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có 5 điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như

hình sau

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x = 0$.

B. $x = 3$.

C. $x = 1$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn B

+) Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 4x + 3$.

$$+) f'(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -2 \\ 1-x = 0 \\ 1-x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

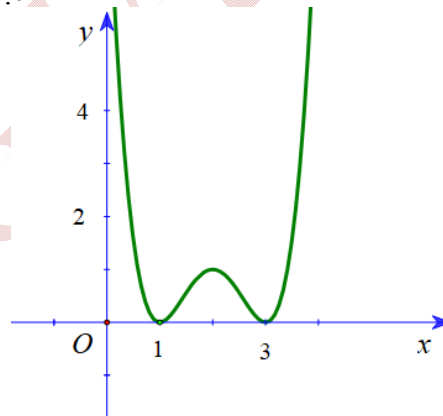
$$+) x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

+) Ta lập được bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$-f'(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$g'(x)$	Không xét dấu		$+$	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 1.

C. 2.

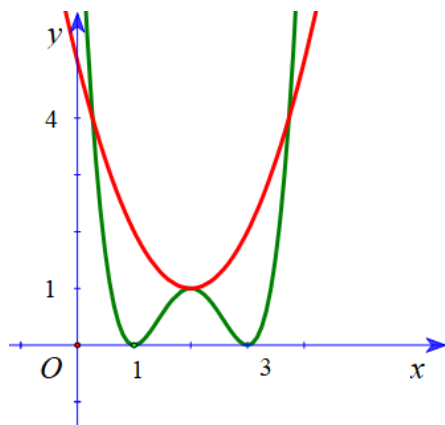
D. 0.

Lời giải

Chọn C

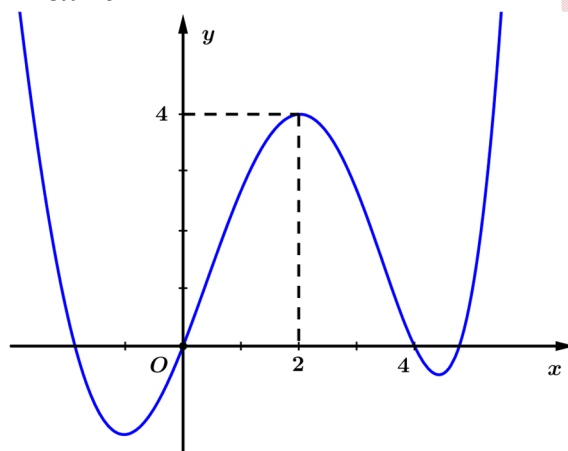
$$\text{Có } g'(x) = f'(x) - x^2 + 4x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 5$$

Ta có đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới



Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn. Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$ là



A. 5.

B. 7.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2) - 6x^2 - 12x = (3x^2 + 6x)[f'(x^3 + 3x^2) - 2]$.

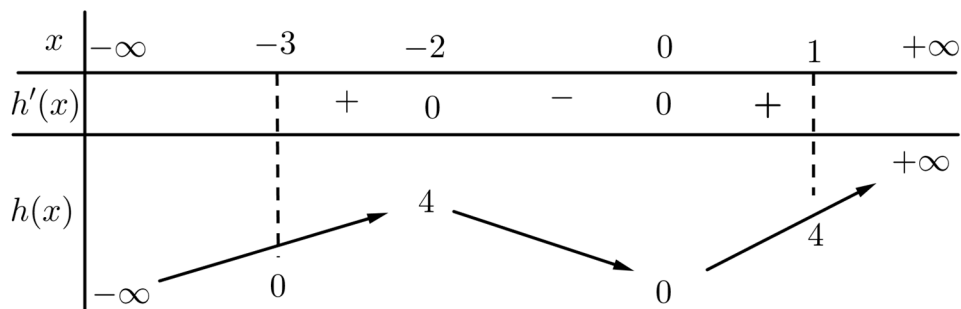
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } f'(x^3 + 3x^2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 = a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b \in (0; 2) \\ x^3 + 3x^2 = c \in (2; 4) \\ x^3 + 3x^2 = d > 4 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } h(x) = x^3 + 3x^2 \text{ có } h'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:



Dựa vào bảng biến thiên của hàm $h(x)$, ta có

Phương trình $x^3 + 3x^2 = a < 0$ có duy nhất một nghiệm $x_1 < -3$.

Phương trình $x^3 + 3x^2 = d > 4$ có duy nhất một nghiệm $x_2 > 1$.

Phương trình $x^3 + 3x^2 = b \in (0; 2)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Phương trình $x^3 + 3x^2 = c \in (2; 4)$ có ba nghiệm phân biệt không trùng với các nghiệm trên.

Do đó, phương trình $g'(x) = 0$ có mười nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = g(x)$ có mười điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

x	$-\infty$	-3	-1	3	6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0 +$	$0 -$	$0 +$	$0 -$	

A. $x_0 = 3$.

B. $x_0 = -1$.

C. $x_0 = -3$.

D. $x_0 = 4$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$g'(x) = f'(x) + 3x^2 - 6x - 9$$

Ta có: $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-1	3	6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0 +$	$0 -$	$0 +$	$0 -$	
$3x^2 - 6x - 9$		$+$	$0 -$	0	$+$	
$g'(x)$	$?$	$+$	$0 -$	$0 +$	$?$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0 +$	$0 -$	$0 +$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x = 3$.

B. $x = 0$.

C. $x = -3$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 4x + 3.$$

$$-f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < -2 \\ 0 < 1-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -3 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$-f'(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	0
$g'(x)$	không xác định	$+$	0	$-$	0

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Hàm số $g(x) = 3f(2-x) + x^3 - 3x$ đạt cực đại tại điểm

A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = -3f'(2-x) + 3x^2 - 3$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy:

$$f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 1 \\ 2-x = 2 \\ 2-x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 1 \\ 2-x < 3 \\ 2-x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \setminus \{0\}$$

$$f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 1 \\ 2-x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}.$$

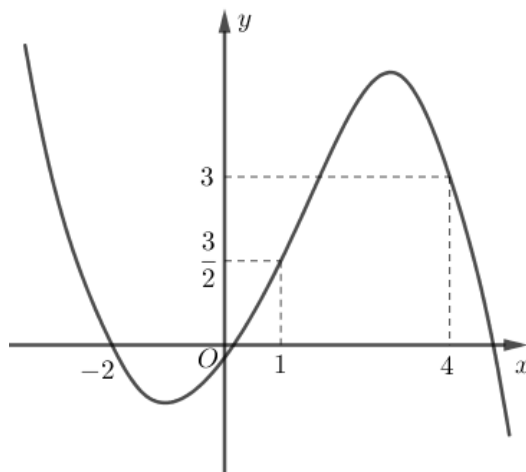
Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

(Nhờ thầy vẽ lại BBT ạ)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$3x^2 - 3$	$+$	0	$-$	0
$-3f'(2-x)$	$+$	0	$-$	0
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0
$g(x)$				

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 2x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-2; 1)$.

D. $(2; 3)$.

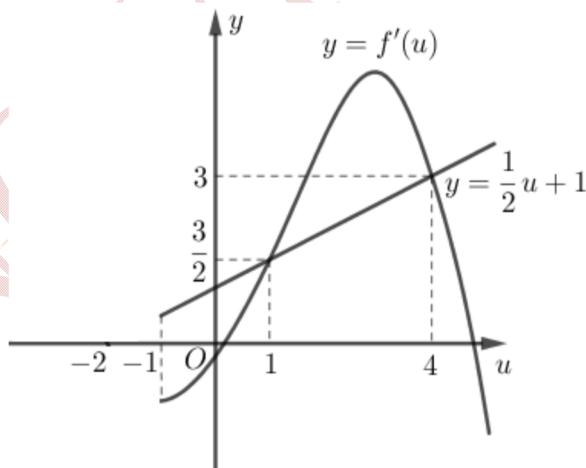
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2(x-1) \left[f'(x^2 - 2x) - \left(\frac{x^2 - 2x}{2} + 1 \right) \right]$.

Đặt $u = x^2 - 2x$, ($u \geq -1$), ta xét hàm số $h(u) = f'(u) - \left(\frac{1}{2}u + 1 \right)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có đồ thị hàm số $y = f'(u)$ và $y = \frac{1}{2}u + 1$ như hình vẽ



Từ đó ta có bảng xét dấu $h(u)$ như sau:

u	-1	1	4	$+\infty$	
$h(u)$	-	0	+	0	-

Ta có

$$u = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

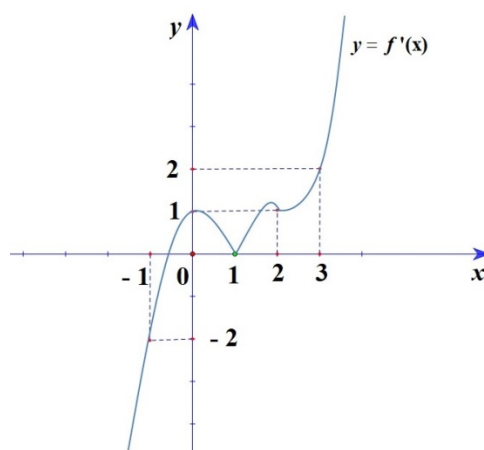
$$u = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$
u	$+\infty$	4	1	-1	1	4	$+\infty$
$h(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 2x$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - \left(\frac{x^4}{2} - 2x^3 + x^2 + 2x + 2020\right)$ là

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 8.

Lời giải

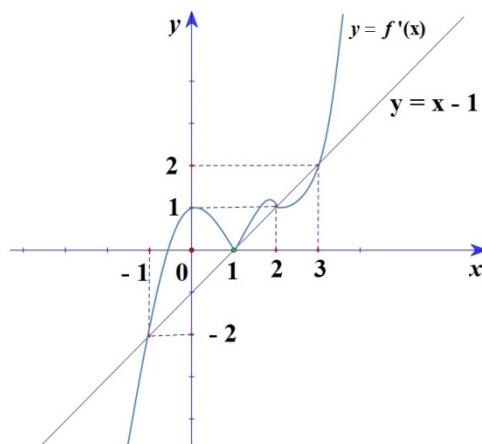
Chọn C

+) Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) - (2x^3 - 6x^2 + 2x + 2) = 2(x - 1) \cdot [f'(x^2 - 2x) - (x^2 - 2x - 1)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) - (x^2 - 2x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = x^2 - 2x - 1 (*) \end{cases}$$

+) Giải (*):

Đặt $t = x^2 - 2x$, phương trình trở thành $f'(t) = t - 1$.



Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$ ta có

$$f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 2 \\ t = 3 \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 2 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

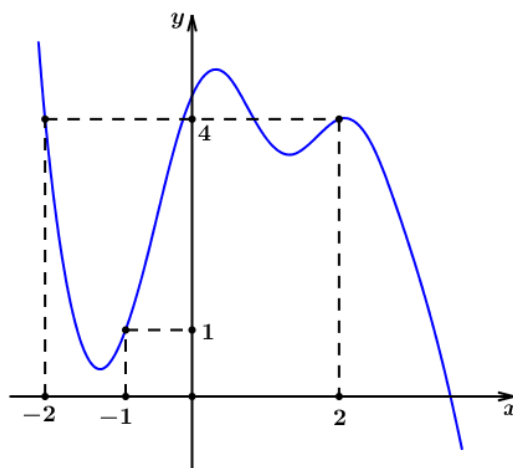
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

(Xét dấu của $g'(x)$ bằng cách lấy một điểm x_0 thuộc khoảng đang xét, thay vào $g'(x)$, kết hợp với đồ thị).

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - \left(\frac{x^4}{2} - 2x^3 + x^2 + 2x + 2020\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = 4f(x) - x^4 + 6x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 5.

D. 0.

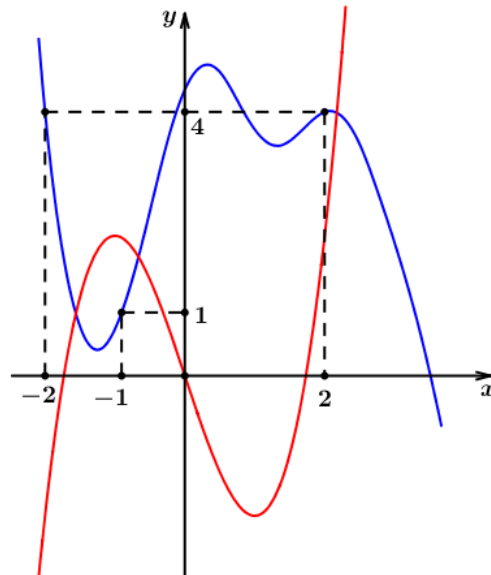
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 4f'(x) - 4x^3 + 12x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^3 - 3x \quad (1)$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$.



Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = x^3 - 3x$.

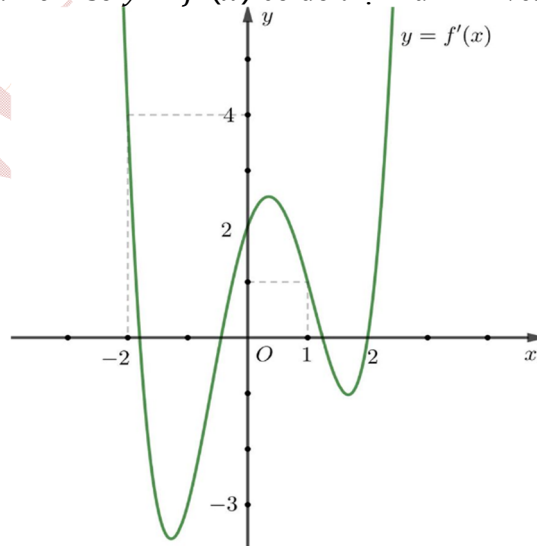
Dựa vào đồ thị ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = a, -2 < a < -1 \\ x = b, -1 < b < 0 \\ x = c, c > 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(a)$	$g(b)$	$g(c)$	$-\infty$

Ta thấy hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^4$ là

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

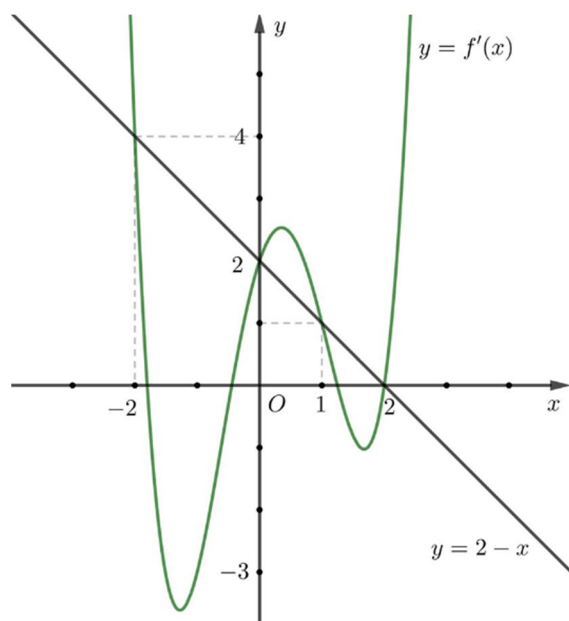
Chọn A

Ta có $g'(x) = 2(x - 2)f'(x^2 - 4x + 3) - 6(x - 2) + 2(x - 2)^3$

$$g'(x) = 2(x-2)[f'(x^2 - 4x + 3) + x^2 - 4x + 1]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f'(x^2 - 4x + 3) = 2 - (x^2 - 4x + 3) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số



Ta có đường thẳng $y = 2 - x$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là $x = -2; x = 0; x = 1; x = 2$.

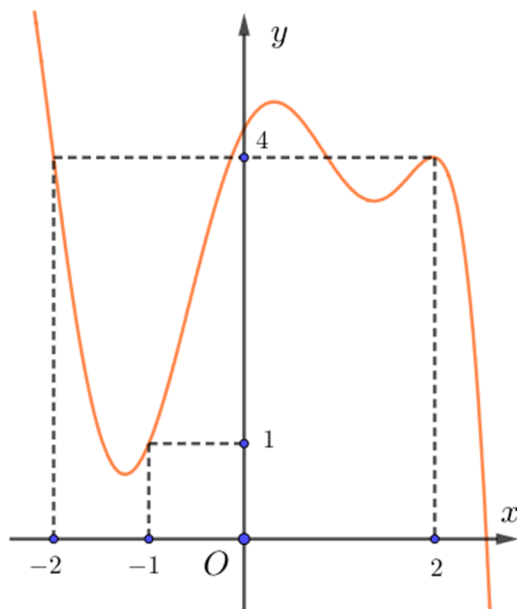
$$\text{Vậy } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 3 = -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có BBT:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{2}$	1	2	3	$2 + \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$										

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số có 6 điểm cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = 4f(x) - x^4 + 6x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x) = 4f(x) - x^4 + 6x^2 \Rightarrow g'(x) = 4f'(x) - 4x^3 + 12x$.

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4f'(x) - 4x^3 + 12x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^3 - 3x = h(x)$.

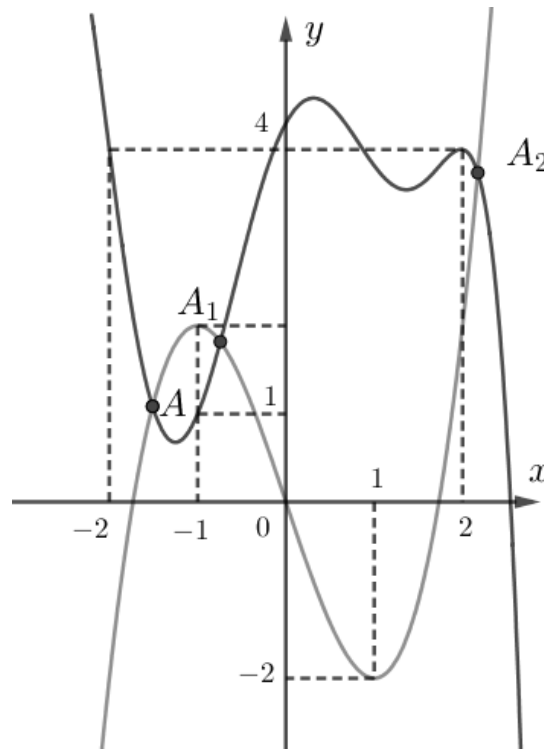
$h(x) = x^3 - 3x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 3$.

$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^3 - 3x$ là

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$						

Ta có đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $h(x) = x^3 - 3x$ là



Dựa vào đồ thị ta thấy 2 đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_A < x_{A_1} < x_{A_2}$.

Ta có bảng xét dấu của hàm số $g'(x) = 4f'(x) - 4x^3 + 12x$

x	x_A		x_{A_1}		x_{A_2}		
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$							

Dựa vào BBT, ta suy ra hàm số $g(x) = 4f(x) - x^4 + 6x^2$ có 3 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 2019	↘ -2018	↗ $+\infty$	

Tìm giá trị cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x) - x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 - 1)[3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3]$$

Mà $x \in [-1; 2] \Rightarrow x^3 - 3x \in [-2; 2] \Rightarrow f'(x^3 - 3x) < 0 \Rightarrow 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 < 0$, do đó

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

x		-1		1		2
g'		0	+	0	-	
g		$g(-1)$		$g(1)$		$g(2)$

Vậy giá trị cực trị của hàm số là $g(1) = f(-2) + 2 = 2021$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = 3f(x^2 - 1) - x^6 + 3x^4 + 9x^2 + 2023$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	-3	-1	0	2	6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $y = g(x) = 3f(x^2 - 1) - x^6 + 3x^4 + 9x^2 + 2023$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $g'(x) = 6x \cdot f'(x^2 - 1) - 6x^5 + 12x^3 + 18x = 6x \cdot [f'(x^2 - 1) - x^4 + 2x^2 + 3]$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x \cdot [f'(x^2 - 1) - x^4 + 2x^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) - x^4 + 2x^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Ta luôn có $x = 0$ là điểm cực trị (do nhân tử $f'(x^2 - 1) - x^4 + 2x^2 + 3$ không thể có nghiệm bội lẻ $x = 0$ nữa, vì vậy ta không phải quan tâm đến sự trùng nghiệm tại $x = 0$).

Xét phương trình: $f'(x^2 - 1) - x^4 + 2x^2 + 3 = 0$.

$$\text{Đặt } u = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x^2 - 1) - x^4 + 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(u) - u^2 + 4 = 0.$$

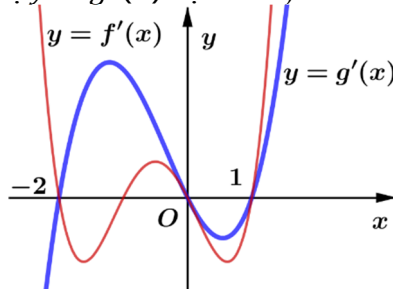
Xét dấu biểu thức $f'(u) - u^2 + 4 = 0$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0	$\sqrt{3}$		$+\infty$			
u	$+\infty$	6	2	-1	2	6	$+\infty$			
$f'(u)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$-u^2+4$		-		0	+	0	-			
$f'(u)-u^2+4$		?	-		0	+	0	-		?

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ đạt cực trị tại $x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ đạt cực trị tại ít nhất 3 điểm.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, các hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây (đồ thị $y = g'(x)$ đậm hơn).



Hàm số $y = f(x + 1) - g(x + 1)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x_0 = -1$.

B. $x_0 = -2$.

C. $x_0 = 0$.

D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = f'(x+1) - g'(x+1)$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x+1) - g'(x+1) = 0 \Leftrightarrow f'(x+1) = g'(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -2 \\ x+1 = 0 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = -1. \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.**Câu 20:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = g(x) = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

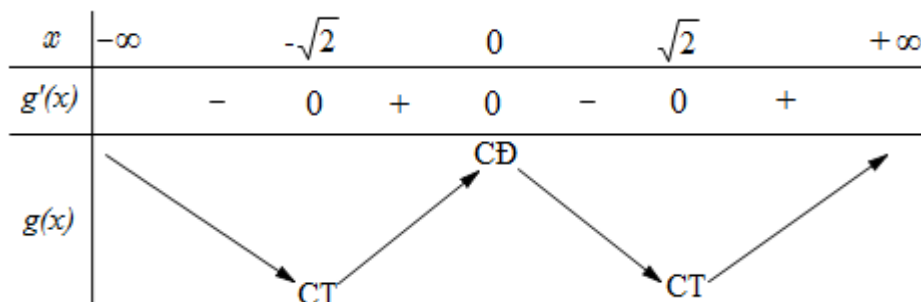
$$\begin{aligned} \text{Có } g'(x) &= 3(-4x^3 + 8x)f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x^5 - 12x^3 - 24x \\ &= 12x(-x^2 + 2)f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x(x^4 - x^2 - 2) \\ &= 12x(-x^2 + 2)f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x(x^2 - 2)(x^2 + 1) \\ &= 12x(-x^2 + 2)[f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)] \end{aligned}$$

Có $-x^4 + 4x^2 - 6 = -(x^4 - 4x^2 + 6) = -[(x^2 - 2)^2 + 2] = -(x^2 - 2)^2 - 2 \leq -2, \forall x \Rightarrow f'[-(x^2 - 2)^2 - 2] < 0$, (theo bbt).

Suy ra $[f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)] < 0$

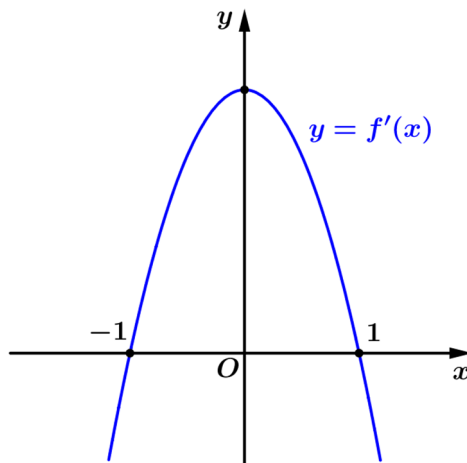
$$\text{Do đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(-x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{2}. \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x) = 3f(x^4 - 2x^2 + 2) - 2x^6 - 6x^4 + 18x^2$.



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = 3f(x^4 - 2x^2 + 2) - 2x^6 - 6x^4 + 18x^2$

$$\Rightarrow g'(x) = 3(4x^3 - 4x) \cdot f'(x^4 - 2x^2 + 2) - 12x^5 - 24x^3 + 36x$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(4x^3 - 4x) \cdot f'(x^4 - 2x^2 + 2) - 12x^5 - 24x^3 + 36x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(4x^3 - 4x) \cdot f'(x^4 - 2x^2 + 2) - (12x^5 + 24x^3 - 36x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(4x^3 - 4x) \cdot [f'(x^4 - 2x^2 + 2) - (x^2 + 3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ f'(x^4 - 2x^2 + 2) - (x^2 + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ f'(x^4 - 2x^2 + 2) = x^2 + 3 \end{cases}$$

Nhận thấy: $x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Kết hợp với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x^4 - 2x^2 + 2) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác $x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $f'(x^4 - 2x^2 + 2) = x^2 + 3 \Leftrightarrow f'(x^4 - 2x^2 + 2) - (x^2 + 3) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ phương trình $f'(x^4 - 2x^2 + 2) = x^2 + 3$ vô nghiệm

Vậy phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Từ BBT $\Rightarrow y = g(x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $g(x) = 15f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 10x^6 - 15x^4 - 60x^2$ đạt cực tiểu tại $x_0 < 0$. Chọn mệnh đề đúng?

- A. $x_0 \in \left(-\frac{5}{2}; -2\right)$. B. $x_0 \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. C. $x_0 \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. D. $x_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

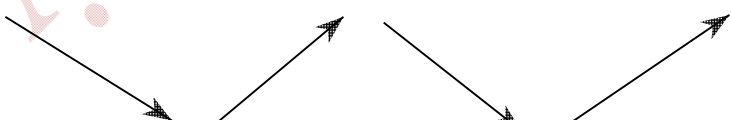
$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } g(x) &= 60(-x^3 + 2x)f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 60(x^5 - x^3 - 2x) \\
 &= 60[(-x^3 + 2x)f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + (x^2 + 1)(x^3 - 2x)] \\
 &= 60(-x^3 + 2x)[f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)] \\
 g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 60(-x^3 + 2x)[f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)] = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$-x^4 + 4x^2 - 6 = -2 - (x^4 - 4x^2 + 4) = -2 - (x^2 - 2)^2 \leq -2 \Rightarrow f'(-x^4 + 4x^2 - 6) \leq 0$$

Mà $-(x^2 + 1) < 0 \Rightarrow f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) = 0$ vô nghiệm.

Ta có BBT của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x_0 < 0$ nên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	3	$-\infty$	

Số điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f^2(2x) - 2f(2x) + 1$ lần lượt là

A. 2; 3.

B. 3; 2.

C. 1; 1.

D. 2; 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2f(2x) \cdot f'(2x) \cdot 2 - 4f'(2x) = 4f'(2x)[f(2x) - 1]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f(2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 2 \\ 2x = m \in (-\infty; -1) \\ 2x = n \in (-1; 2) \\ 2x = p \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f^2(2x) - 2f(2x) + 1$

x	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{n}{2}$	1	$\frac{p}{2}$	$+\infty$				
$f'(2x)$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$f(2x)-1$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ta thấy y' có ba lần đổi dấu từ âm sang dương, hai lần đổi dấu từ dương sang âm.

Vậy hàm số $y = f^2(2x) - 2f(2x) + 1$ có hai điểm cực đại và ba điểm cực tiểu.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$
		-2			-2		

Hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4

B. 9

C. 5

D. 7

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 6f^2(x) \cdot f'(x) + 8f(x) \cdot f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}, f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}, f(x) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \\ x = d \end{cases}$$

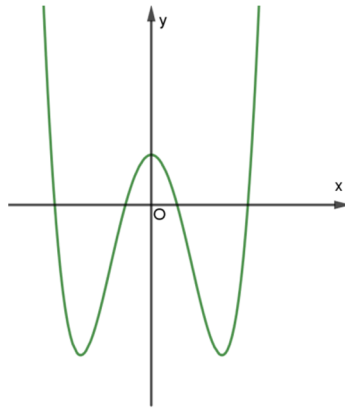
thỏa mãn: $x_1 < a < -1 < b < 0 < c < 1 < d < x_2$

Khi đó để có nhiều điểm cực tiểu nhất thì xét dấu của $g'(x)$ có dạng:

x	x_1	a	-1	b	0	c	1	d	x_2		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Do đó hàm số có nhiều nhất **5** điểm cực tiểu.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $F(x) = 3f^4(x) + 2f^2(x) + 5$.

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = 3f^4(x) + 2f^2(x) + 5 \Rightarrow F'(x) = 12f^3(x)f'(x) + 4f(x)f'(x)$$

$$F'(x) = 4f(x)f'(x)(3f^2(x) + 1)$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 0$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

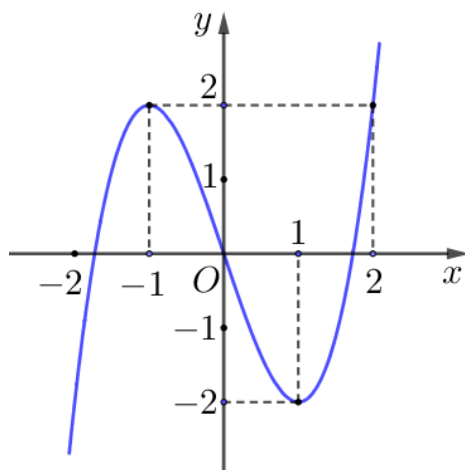
Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 .

Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị phân biệt x_5, x_6, x_7 suy ra $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_5, x_6, x_7 lần lượt khác các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4 .

Từ, suy ra phương trình $F'(x) = 0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $F(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(\sqrt{2f(\cos x)})$ trên đoạn $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0$.

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1; 2)$, $(1; -2)$, $(2; 2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a + b - c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

Do đó $f(x) = x^3 - 3x$.

Đặt $t = \cos x$, $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \Rightarrow t \in [-1; 0] \Rightarrow f(\cos x) = f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in [-1; 0]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0$; $\forall t \in [-1; 0] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 0]$

Suy ra $2f(t) \in [2f(0); 2f(-1)]$ hay $2f(t) \in [0; 4]$.

Đặt $u = \sqrt{2f(t)} \Rightarrow u \in [0; 2] \Rightarrow y = f(u) = u^3 - 3u$ với $u \in [0; 2]$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3 \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \in [0; 2]$.

Bảng biến thiên của $f(u)$

x	0	1	2
$f'(u)$		-	+
$f(u)$	0		2

-2

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $f(u)$ có 1 điểm cực trị trên đoạn $[0; 2]$ hay

hàm số $y = f(\sqrt{2f(\cos x)})$ có 1 điểm cực trị trên đoạn $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Đặt $g(x) = f(x^2) + e^{x^3 - 3x^2 + 1}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

D. $g(-3) - g(-2) < 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + (3x^2 - 6x) \cdot e^{x^3-3x^2+1} = x[2f'(x^2) + (3x - 6)e^{x^3-3x^2+1}]$

$$f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 \in \{1; 4\} \Leftrightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$$

$$(3x - 6)e^{x^3-3x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

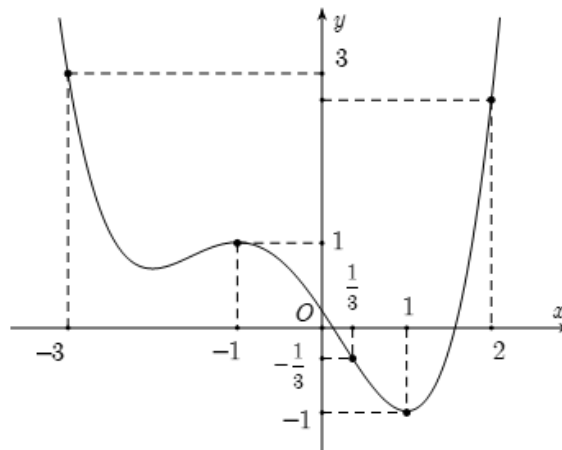
Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x^2)$	-	0	+	0	-	0	-
$(3x-6)e^{x^3-3x^2+1}$	-		-		-		+
$g'(x)$	+		kxd		+	0	-

(kxd: không xác định)

Dựa vào bảng xét dấu, ta chọn B.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$?



A. 9.

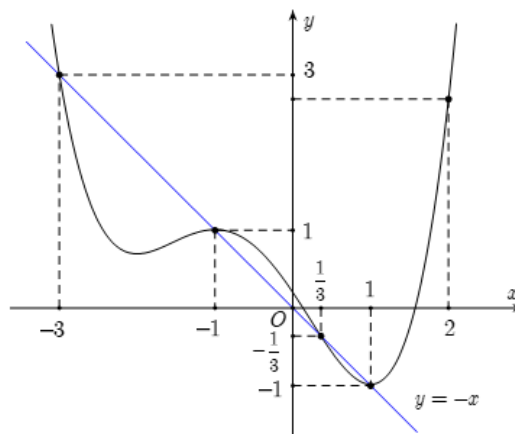
B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right)^2 + 3$

$$g'(x) = \frac{5 \cos x}{2} \left[2f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Đặt $t = \frac{5 \sin x - 1}{2}$ vì $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow t \in [-3; 2]$

$$\text{Khi đó: } 2f' \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{5 \sin x - 1}{2} \right) = 0 \text{ thành } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } t = 1 \Rightarrow \frac{5 \sin x - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_2 \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } t = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5 \sin x - 1}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_3 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_4 \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } t = -1 \Rightarrow \frac{5 \sin x - 1}{2} = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_5 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_6 \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } t = -3 \Rightarrow \frac{5 \sin x - 1}{2} = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in (0; 2\pi).$$

$$\square \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \in (0; 2\pi) \\ x = \frac{3\pi}{2} \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

Vì $x = \frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép nên không là điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.

Dạng 5: Cực trị hàm hợp $f(u)$, $g(f(x))$, hàm liên kết...có tham số

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x + m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$, $(1; 3)$ và liên tục tại $x = 1$ nên đồng biến trên $(-1; 3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x + m)$ và $x \in (0; 2) \Leftrightarrow x + m \in (m; m + 2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (m; m + 2) \subset (-1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m + 2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m = -1; m = 0; m = 1$.

Câu 44: Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1		-1		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ để hàm số $g(x) = f(f(x) + m)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

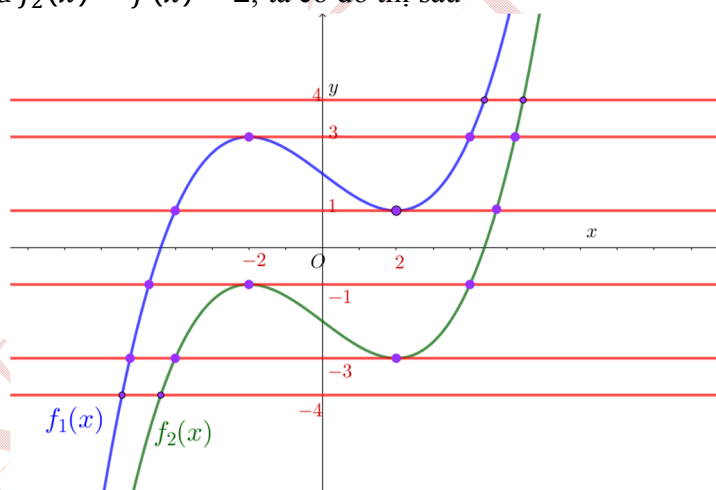
Chọn B

$$g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) + m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) + m) = 0 \end{cases}$$

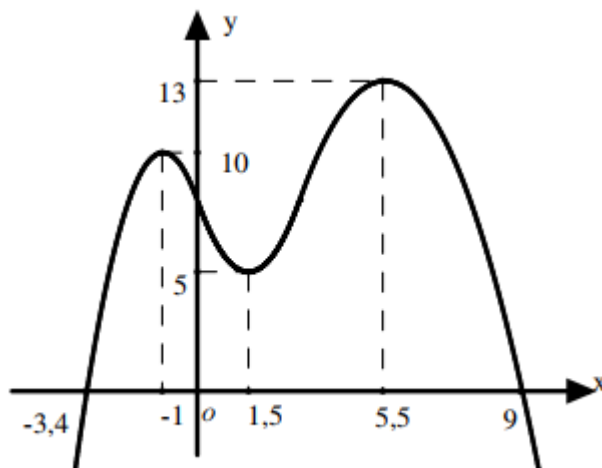
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + m = -2 \\ f(x) + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + 2 = -m \\ f(x) - 2 = -m \end{cases}, \text{ trong đó } x = -2 \text{ và } x = 2 \text{ là hai nghiệm bội lẻ.}$$

Đặt $f_1(x) = f(x) + 2$ và $f_2(x) = f(x) - 2$, ta có đồ thị sau



Với $\begin{cases} m \in (-5; 5) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow m \in \{-4; -3; -1; 1; 3; 4\}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ và $f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$.
Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$ với $m \in \mathbb{N}$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số $y = g(x)$ có đúng hai điểm cực trị?



A. 8.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - m$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$.

Do đó: Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ tương đương với số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = m$.

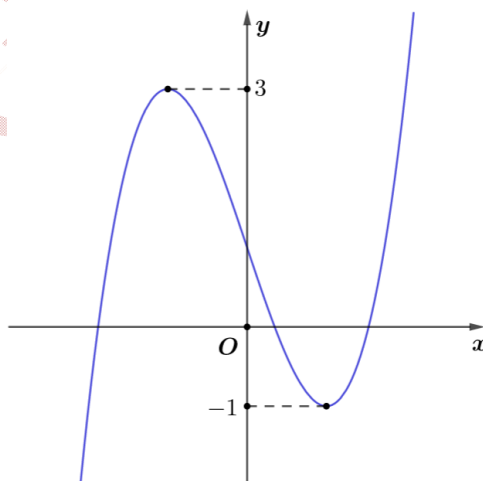
Nhận xét: Hàm số $y = g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có số nghiệm lớn hơn bằng 2, trong đó có đúng 2 nghiệm đơn.

Dựa vào đồ thị và các lập luận trên, suy ra $\begin{cases} m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}$

mà $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 10; 11; 12\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ). Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ sao cho hàm số $y = f(x) - mx + 2020$ có đúng một điểm cực trị. Tổng các phần tử của S bằng



A. -5; -3.

B. 2.

C. -1.

D. Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = f'(x) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$ (1).

Hàm số có đúng một điểm cực trị khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất hoặc có hai nghiệm trong đó

có 1 nghiệm kép $\Rightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$

Vì $m \in (-5; 5) \Rightarrow m \in -5; -1 \cup 3; 5$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 3; 4\} \Rightarrow S = \{-4; -3; -2; -1; 3; 4\}$.

Tổng các phần tử của S bằng: $-4 - 3 - 2 - 1 + 3 + 4 = -3$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x) = |x - 1| + |x - 5| + |x - 8|$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-23; 23]$ để hàm số $y = f(|x| + m)$ có ba điểm cực trị?

A. 46.

B. 27.

C. 19.

D. 28.

Lời giải

Chọn D

+ Xét hàm số $y = f(x) = |x - 1| + |x - 5| + |x - 8|$ có bảng biến thiên kép như hình vẽ:

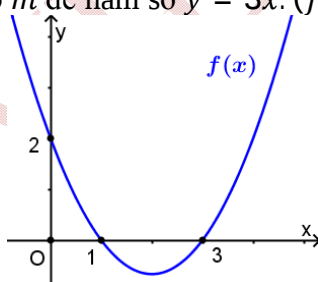
x	$-\infty$	1	5	8	$+\infty$
$f(x)$	$-3x+14$	$-x+12$	$x+2$	$3x-14$	
$f'(x)$	-3	-1	1	3	
$f(x)$	$+\infty$		7		$+\infty$

+ Hàm số $f(x)$ có điểm cực trị là $x = 5 \rightarrow$ hàm số $f(x + m)$ có một điểm cực trị là: $x = (5 - m)$.

+ Hàm số $f(|x| + m)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số: $f(x + m)$ phải có một điểm cực trị dương

+ Suy ra: $5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5 \Rightarrow -23 \leq m \leq 4 \Rightarrow$ có 28 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là một đường parabol như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 3x \cdot (f(x) + m)$ có hai điểm cực trị. Tập S là

A. $(-\infty; \frac{14}{9})$.B. $(-2; \frac{11}{6})$.C. $(\frac{11}{2}; +\infty)$.D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta thấy parabol có dạng: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ và đi qua các điểm $(0; 2); (1; 0); (3; 0)$.

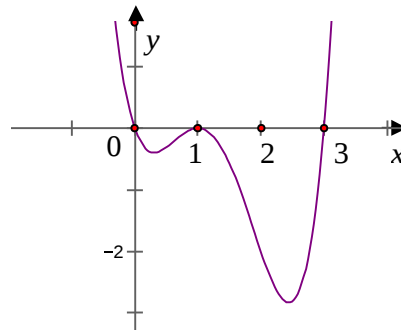
$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$$

$$\text{Suy ra hàm số } y = 3x \cdot (f(x) + m) = 3x \left[\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 + m \right] = 2x^3 - 8x^2 + 3(m+2)x$$

$$y' = 6x^2 - 16x + 3(m+2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 16x + 3(m+2) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow (-8)^2 - 3.6(m+2) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{14}{9}.$$

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị?

A. $m \in [0; 3]$.B. $m \in 0; 3)$.C. $m \in (3; +\infty)$.D. $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải

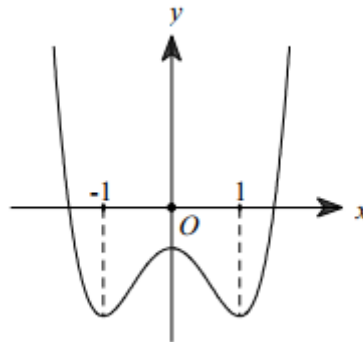
Chọn B

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi qua 1 hay 1 là nghiệm bội chẵn.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x^2 + m) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1(L) \\ x^2 + m = 3 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \\ x = 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua ba nghiệm đó $\Leftrightarrow m \in 0; 3)$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Đề hàm số $y = f(ax^2 + bx + 1)$, với $a, b \neq 0$ có năm cực trị thì điều kiện cần và đủ là

A. $4a < b^2 \leq 8a$.B. $b^2 \leq 4a$.C. $4a \leq b^2 < 8a$.D. $b^2 \geq 8a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = (2ax + b) \cdot f'(ax^2 + bx + 1)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + b = 0 \\ f'(ax^2 + bx + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ ax^2 + bx + 1 = 0 \\ ax^2 + bx + 1 = -1 \\ ax^2 + bx + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \\ ax^2 + bx + 1 = 0(1) \\ ax^2 + bx + 2 = 0(2) \end{cases}$$

Đề hàm số $y = f(ax^2 + bx + 1)$, với $a, b \neq 0$ có năm cực trị thì điều kiện cần và đủ là phương trình $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt

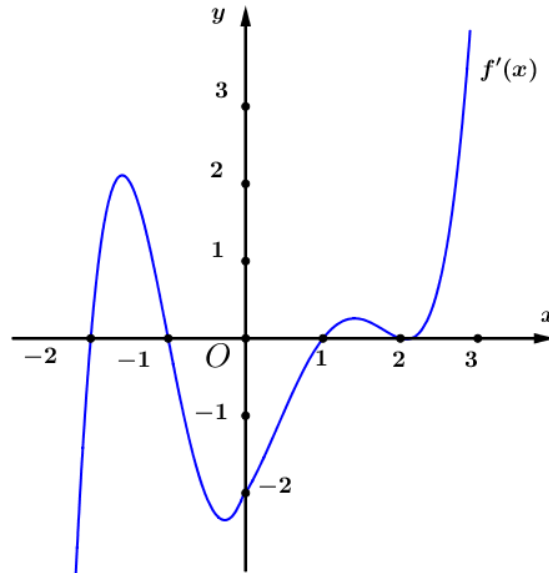
TH1: (1) có 2 nghiệm phân biệt $\notin \left\{-\frac{b}{2a}; -\frac{b}{a}; 0\right\}$, phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4a > 0 \\ b^2 - 8a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4a < b^2 \leq 8a$$

TH2: (2) có 2 nghiệm phân biệt $\notin \left\{-\frac{b}{2a}; -\frac{b}{a}; 0\right\}$, phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4a \leq 0 \\ b^2 - 8a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8a < b^2 \leq 4a \text{ vô lý.}$$

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là một đa thức. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi có nhiều giá trị nguyên của m thuộc $(-5; 5)$ để hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2|x| + m)$ có 9 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm $y = g(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục Oy .

Xét $x \geq 0$, $y = g(x) = f(x^2 - 2x + m)$, $y' = g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ x^2 - 2x + m = -2 \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ x^2 - 2x + m = -1 \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ x^2 - 2x + m = 1 \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ x^2 - 2x + m = 2 \text{ (nghĩa là } \neg n) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ (x - 1)^2 = -1 - m \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ (x - 1)^2 = -m \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ (x - 1)^2 = 2 - m \text{ (nghĩa là } \neg n) \\ (x - 1)^2 = 3 - m \text{ (nghĩa là } \neg n) \end{cases}.$$

Để hàm số có 9 cực trị thì hàm số $y = g(x)$ có 4 điểm cực trị trên miền $x > 0 \Leftrightarrow g'(x)$ có 4 nghiệm đơn

$$\text{đương } \begin{cases} -1 - m > 0 \\ -m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1, \text{ kết hợp } m \in \mathbb{Z}, m \in (-5; 5) \text{ nên } m \in \{-4; -3; -2\}.$$

Câu 42: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x = -3, x = 3, x = 5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x) = f(e^{x^3+3x^2} - m)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2} \cdot f'(e^{x^3+3x^2} - m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2} \cdot f'(e^{x^3+3x^2} - m) = 0$$

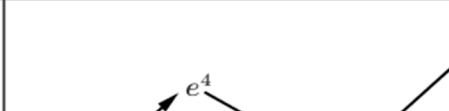
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ e^{x^3+3x^2} - m = -3 \\ e^{x^3+3x^2} - m = 3 \\ e^{x^3+3x^2} - m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ e^{x^3+3x^2} = m - 3, (1) \\ e^{x^3+3x^2} = m + 3, (2) \\ e^{x^3+3x^2} = m + 5, (3) \end{cases}$$

Hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi tổng số nghiệm đơn và bội lẻ, khác 0 và -2 của các phương trình (1), (2), (3) là 5.

Xét hàm số $h(x) = e^{x^3+3x^2}$ có $h'(x) = (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2}$.

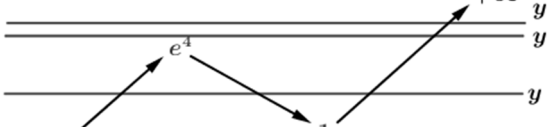
Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
h'	$+$	0	$-$	0	$+$
h					

Khi đó có 3 trường hợp sau:

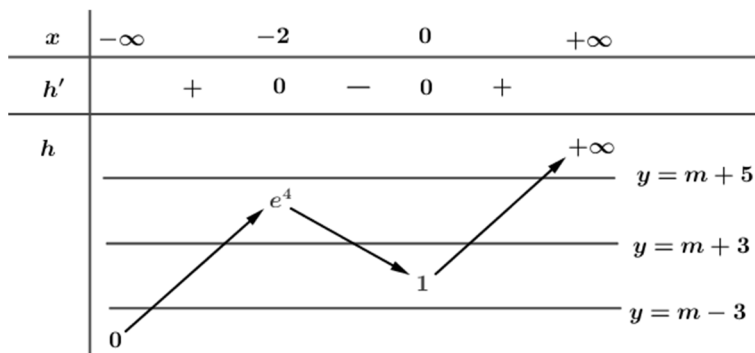
Trường hợp 1:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
h'		$+$	0	$-$	0	$+$
h						

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m + 3 \geq e^4 \\ 1 < m - 3 < e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq e^4 - 3 \approx 51,6 \\ 4 < m < e^4 + 3 \approx 57,6 \end{cases}$$

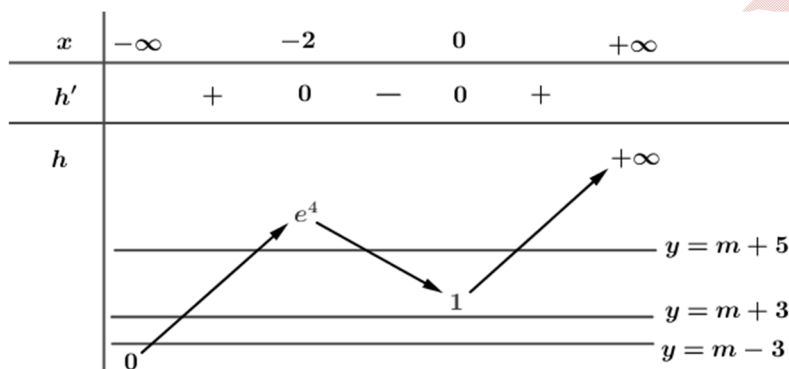
Do m nguyên nên $m \in \{52; 53; 54; 55; 56; 57\}$.

Trường hợp 2:



Khi đó: $\begin{cases} m + 5 \geq e^4 \\ 1 < m + 3 < e^4 \\ 0 < m - 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > e^4 - 5 \approx 49,6 \\ -2 < m < e^4 - 3 \\ 3 < m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$

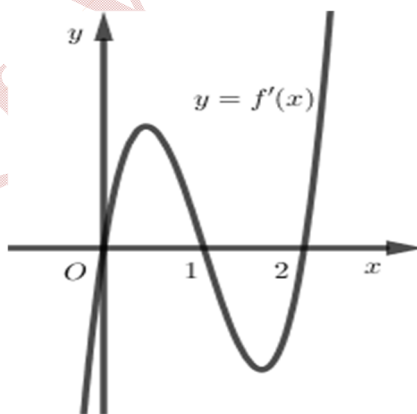
Trường hợp 3:



Khi đó: $\begin{cases} 1 < m + 5 < e^4 \\ m + 3 \leq 1 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < e^4 - 5 \approx 49,6 \\ m \leq -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ và $f(0) = 0$.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(f(x) - f(m))$ có đúng 11 điểm cực trị ?

A. $m \in (0; 1)$.

B. $m \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

C. $\begin{cases} m \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \\ m \notin \{0; 1; 2\} \end{cases}$.

D. $m \in (0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

+) $f'(x) = 4x(x - 1)(x - 2) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + d$.

+) Do $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ suy ra $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	0	1	2	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$			1			$+\infty$

Đặt $g(x) = f(f(x) - f(m)) \Rightarrow g'(x) = f'(f(x) - f(m)) \cdot f'(x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) - f(m)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ f(x) = f(m) \quad (1) \\ f(x) = f(m) + 1 \quad (2) \\ f(x) = f(m) + 2 \quad (3) \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta xét các trường hợp

* Trường hợp 1: $f(m) = 0$, khi đó

Phương trình (1) cho 2 nghiệm kép $x = 0; x = 2$.

Phương trình (2) cho 3 nghiệm: $x = 1$ là nghiệm kép và 2 nghiệm đơn $x_1, x_2 \notin (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

Phương trình (3) cho 2 nghiệm đơn $x_3, x_4 \notin (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có tất cả 7 điểm cực trị là $x \in \{0; 1; 2; x_1; x_2; x_3; x_4\}$ (loại).

* Trường hợp 2: $f(m) > 0$, khi đó phương trình (2) và (3) luôn cho 4 nghiệm không thuộc khoảng $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

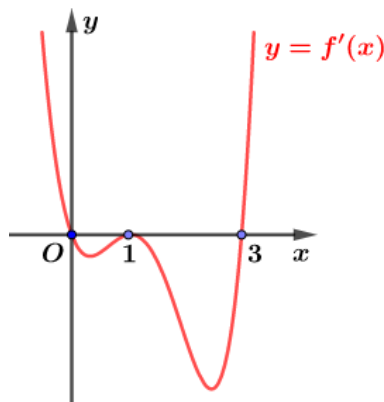
Vậy hàm số $y = g(x)$ có 11 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < f(m) < 1$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có: $0 < f(m) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \\ m \notin \{0; 1; 2\} \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} m \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \\ m \notin \{0; 1; 2\} \end{cases}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có đúng 3 điểm cực trị?



A. 2.

B. Vô số.

C. 4

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 2x \cdot f'(x^2 + m).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 = -m + 3 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1. Do đó hoặc phương trình $x^2 + m = 1$ vô nghiệm hoặc nghiệm của phương trình $x^2 + m = 1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y' = 0$.

Nếu $\begin{cases} -m \neq 0 \\ -m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì $x = 0$ là nghiệm đơn của phương trình $y' = 0$.

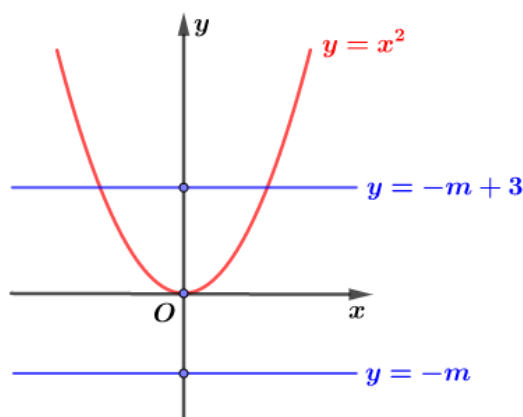
Nếu $\begin{cases} -m = 0 \\ -m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ thì nghiệm $x = 0$ là nghiệm bội ba của phương trình $y' = 0$.

Suy ra $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + m)$, $\forall m$.

Xét các phương trình: $x^2 = -m$ (1) và $x^2 = -m + 3$ (2).

Nhận xét: Phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung; $-m < -m + 3, \forall m$

Minh họa đồ thị



Xét $-m > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_3; x_4$. Khi đó y' đổi dấu 5 lần qua các nghiệm $x_1; x_2; x_3; x_4$ và 0 nên hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 5 điểm cực trị.

Xét $-m + 3 \leq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm; phương trình (2) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 1 điểm cực trị.

Xét $\begin{cases} -m \leq 0 \\ -m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$. Khi đó phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$; phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Suy ra hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị thì $0 \leq m < 3$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 129. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 17.

C. 19.

D. 16.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2(x^2 - 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có $g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$ nên:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ h(x) = 2x^2 - 12x + m = 0 \quad (1) \\ g(x) = 2x^2 - 12x + m - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Ta có $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 5 nghiệm đơn hoặc bội lẻ. Điều này xảy ra khi PT và PT đều có 2 nghiệm phân biệt khác 3. Điều kiện này tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ \Delta'_h > 0 \\ g(3) \neq 0 \\ h(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 2m > 0 \\ 36 - 2(m - 4) > 0 \\ m - 18 \neq 0 \\ m - 22 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 18 \\ m < 22 \\ m \neq 18 \\ m \neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow m < 18.$$

Vậy có 17 giá trị nguyên dương của tham số thực m thỏa mãn đề bài.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x + 1)^4(x - 3)^3(x^2 + mx)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của để hàm số $y = f(2x + 1)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2(x + 1)^4(x - 3)^3(x^2 + mx) = f'(x) = x^3(x + 1)^4(x - 3)^3(x + m). \\ y' &= 2f'(2x + 1) = 2(2x + 1)^3(2x + 2)^4(2x - 2)^3(2x + 1 + m) \\ y' = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 1)^3 = 0 & (1) \\ (2x + 2)^4 = 0 & (2) \\ (2x - 2)^3 = 0 & (3) \\ 2x + 1 + m = 0 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (1) có 1 nghiệm bội lẻ $x = -\frac{1}{2}$.

Phương trình (2) có 1 nghiệm bội chẵn $x = -1$.

Phương trình (3) có 1 nghiệm bội lẻ $x = 1$.

Số điểm cực trị của hàm số là số nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$. Do đó, hàm số có 1 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x - 2)^2(x^2 + 3x - 4)$. Gọi S là tập các số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng

A. 10.

B. 5.

C. 14.

D. 4.

Lời giải:

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } y = g(x) = f(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x^2 - 4x + m - 2)^2 = 0 \\ h_1(x) = x^2 - 4x + m - 1 = 0 \quad (1) \\ h_2(x) = x^2 - 4x + m + 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình và có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình có lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_1(2) \neq 0 \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \\ h_2(2) \neq 0 \\ \Delta_1 \leq 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq m < 5 \\ m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 5$$

mà $m \in [-10; 10]$ do đó $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ có 5 phần tử.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 17.

B. 18.

C. 16.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = (2x-8) \cdot f'(x^2-8x+m)$.

Vì $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ nên

$$g'(x) = (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0(1) \\ x^2 - 8x + m = 0(2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0(3) \end{cases}.$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2-8x+m-1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_2 = 16 - m > 0 \\ \Delta'_3 = 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

Vì m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m thỏa mãn.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3-3x^2+m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2-6x) \cdot f'(x^3-3x^2+m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+m=1$ (nếu có) dấu của $f'(x^3-3x^2+m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3-3x^2+m=0$ và $x^3-3x^2+m=2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x) = -x^3+3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2+6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				4		
			0				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3 + 3x^2 = m$ và $-x^3 + 3x^2 = m - 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$$0 < m - 2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2-4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ trong đó } x = -1 \text{ là nghiệm kép.}$$

$$g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m) = 0(*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1(1) \\ 2x^2 - 12x = -m(1) \\ 2x^2 - 12x = 4 - m(2) \end{cases}$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2 - 12x + m = -1$)

Xét hàm số $y = 2x^2 - 12x$ có đồ thị (C).

$$y' = 4x - 12$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$				$+\infty$
			-18		

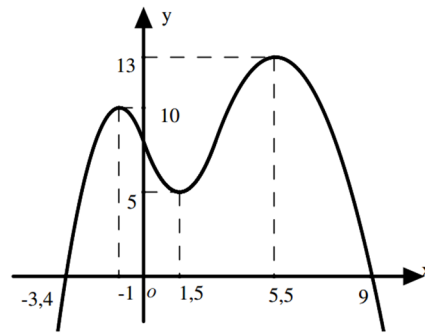
Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1); (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.

Ta có: $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và

$f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3, 4) \cup (9; +\infty)$. Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị?



A. 4.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - m$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$. Để hàm số $y = g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}$.

Khi đó $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$. Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + \sqrt{12}x - \frac{1}{4}(3m + n - 24) \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số không có điểm cực trị nào và m, n là hai số thực không âm thỏa mãn $3n - m \leq 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2m + n$.

A. 8.

B. 9.

C. 11.

D. 10.

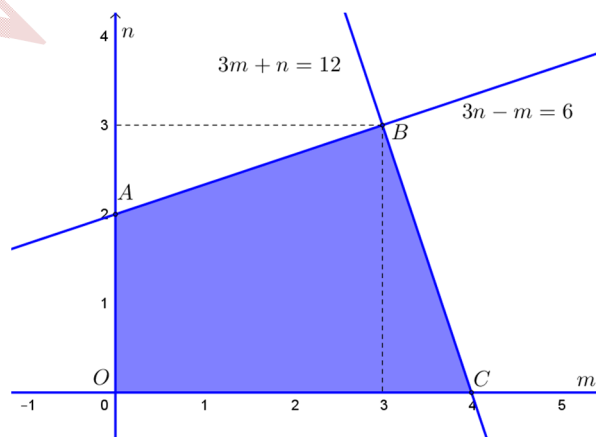
Lời giải

Chọn B

Vì $f'(x)$ là tam thức bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x)$ không có điểm cực trị nào $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 12 + (3m + n - 24) \leq 0 \Leftrightarrow 3m + n \leq 12$.

$\Rightarrow m, n$ là hai số thực thỏa mãn hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} m \geq 0 \\ n \geq 0 \\ 3m + n \leq 12 \\ 3n - m \leq 6 \end{cases} \quad (I).$$

Biểu diễn miền nghiệm của (I) trong mặt phẳng tọa độ Omn , ta được hình tứ giác $OABC$ với $A(0; 2)$, $B(3; 3)$, $C(4; 0)$ dưới đây:



Đặt $P(m; n) = 2m + n$, ta biết rằng $P(m; n)$ có GTLN và giá trị ấy đạt được tại 1 trong 4 đỉnh của tứ giác $OABC$. Mà $P(0; 0) = 0$, $P(0; 2) = 2$, $P(3; 3) = 9$, $P(4; 0) = 8$.

Vậy $\max P(m; n) = P(3; 3) = 9$.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 cực trị.

A. 0.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = x(x-1)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

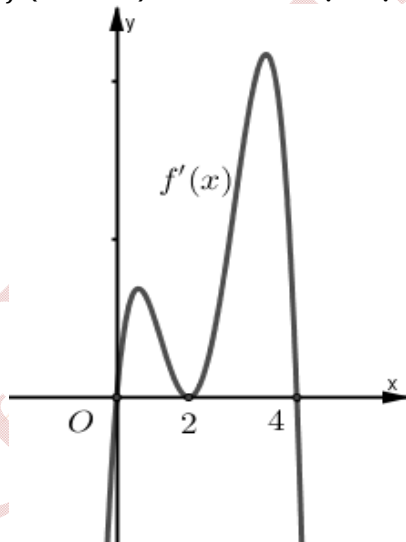
$$\text{Lại có } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \quad (1) \\ x^2 = 1 - m \quad (2) \\ x^2 = 3 - m \quad (3) \end{cases}$$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình (1), (3) có nghiệm không chung nhau và $-m < 3 - m$ nên:

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ có 3 cực trị} \Leftrightarrow g'(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm bội lẻ} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m > 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên bằng 3.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - m)$ có ba điểm cực trị?



A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

$$\text{Ta có } y' = 2x \cdot f'(x^2 - m).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \\ x^2 - m = 2 \\ x^2 - m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \\ x^2 = m + 2 \\ x^2 = m + 4 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta thấy

$$f'(x^2 - m) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - m < 4 \Leftrightarrow m < x^2 < m + 4.$$

$$f'(x^2 - m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - m < 0 \\ x^2 - m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < m \\ x^2 > m + 4 \end{cases}$$

TH1: Với $m \leq -4$.

$$y' = 2x \cdot f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Suy ra hàm số $y = f(x^2 - m)$ không thể có ba cực trị.

TH2: Với $-4 < m \leq -2$.

$$y' = 2x \cdot f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+4} \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x \cdot f'(x^2 - m)$

x	$-\sqrt{m+4}$	0	$\sqrt{m+4}$
$y' = 2x \cdot f'(x^2 - m)$	+	0	-

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH3: Với $-2 < m \leq 0$.

$$y' = 2x \cdot f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m+2} \\ x = \pm\sqrt{m+4} \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x \cdot f'(x^2 - m)$

x	$-\sqrt{m+4}$	$-\sqrt{m+2}$	0	$\sqrt{m+2}$	$\sqrt{m+4}$
$y' = 2x \cdot f'(x^2 - m)$	+	0	-	0	-

Từ bảng trên suy ra hàm số có 3 cực trị.

TH4: Với $m > 0$.

$$y' = 2x \cdot f'(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \\ x = \pm\sqrt{m+2} \\ x = \pm\sqrt{m+4} \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $y' = 2x \cdot f'(x^2 - m)$.

x	$-\sqrt{m+4}$	$-\sqrt{m+2}$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$\sqrt{m+2}$	$\sqrt{m+4}$
y'	+	0	-	0	-	0	+

Từ bảng trên suy ra hàm số có 5 cực trị.

Từ các trường hợp trên, hàm số $y = f(x^2 - m)$ có ba cực trị khi $m \in -4; 0$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Cách 2:

Ta có $y' = 2x \cdot f'(x^2 - m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \\ x^2 - m = 2 \\ x^2 - m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \\ x^2 = m + 2 \\ x^2 = m + 4 \end{cases}$$

Để thấy

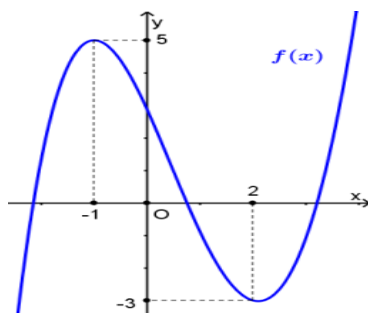
$x = 0$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - m)$.

$x^2 = m + 2$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y' = 0$.

Mặt khác $m < m + 4 \forall m$ nên hai phương trình $x^2 = m$ và $x^2 = m + 4$ không có nghiệm trùng nhau.

Vậy để hàm số $y = f(x^2 - m)$ có 3 điểm cực trị thì có 2 nghiệm phân biệt khác 0 đồng thời vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm kép bằng 0 $\Rightarrow -4 < m \leq 0 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2012]$ để hàm số $y = f(f(x) - 2m + 1)$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 4029.

B. 4038.

C. 4030.

D. 4028.

Lời giải

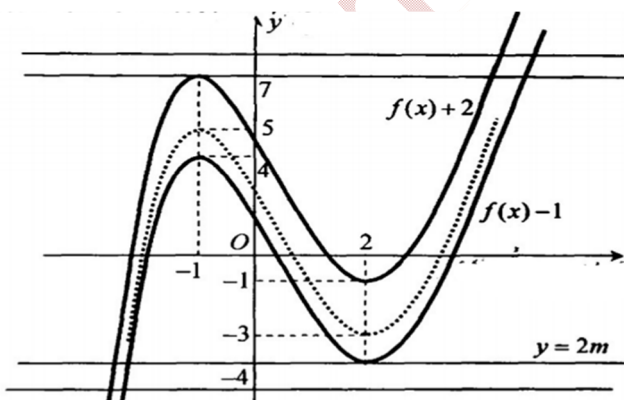
Chọn A

Đặt $g(x) = f(f(x) - 2m + 1) \Rightarrow g'(x) = f'(x)f'(f(x) - 2m + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ f'(f(x) - 2m + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } f'(f(x) - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2m + 1 = -1 \\ f(x) - 2m + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2 = 2m \\ f(x) - 1 = 2m \end{cases}$$

Ta áp dụng kỹ năng hợp hàm, tức là xét tương giao của đường thẳng $y = 2m$ và hai đồ thị hàm số $y = f(x) + 2$; $y = f(x) - 1$



Để hàm số $g(x) = f(f(x) - 2m + 1)$ có 4 điểm cực trị thì đường thẳng $y = 2m$ phải cắt đồ thị 2 hàm số trên tại hai điểm phân biệt (không kể tiếp xúc)

Dựa vào đồ thị ta thấy điều kiện là $\begin{cases} 2m \geq 7 \\ 2m \leq -4 \end{cases} \xrightarrow{m \in [-2021; 2012]} \begin{cases} 4 \leq m \leq 2012 \\ -2021 \leq m \leq -2 \end{cases} \Rightarrow$ có 4029 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.